CÁLCULO III, 2º Curso de CC. Matemáticas, 2001/2002
Examen, 29 de enero de 2002

Apellidos y Nombre:

D.N.I. **Grupo:**

1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, cuyas componentes están definidas por

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \operatorname{sen}(x + z^2) + \operatorname{sen}(2\,y + z^3) + e^{xyz} - 1\,,\\
F_2 &= x + y + z - \operatorname{sen}(x + z) + \cos(y + z) - 1\,,\\
F_3 &= \operatorname{sen}(x^2 + z) + \operatorname{sen}(y^2 + z) + \operatorname{sen}(xy + z)\,.
\end{aligned}
$$

a) Probar que F admite una inversa local $G \in C^1$, con $G(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

b) Calcular la matriz jacobiana de $G \circ G$ en el origen.

---

2. Considérese en $\mathbb{R}^3$ el plano $\mathcal{P}$ de ecuación

$$x + y = 1$$

y la superficie $\mathcal{S}$ que es imagen de $\mathbb{R}^2$ por la función

$$F(u, v) = (e^{-v} \cos u, e^{-v} \operatorname{sen} u, v)\,.$$

a) Representar gráficamente $\mathcal{S}$.

b) Hallar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$.

c) Sea $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$. Demostrar que $\mathcal{C}$ es una curva regular.

d) Sea $\mathbf{p} = (1, 0, 0) \in \mathcal{C}$. Hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en $\mathbf{p}$.

---

3. Sean los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
\vec{G} &= (y\, e^y \cos xy, 1 + e^y \operatorname{sen} xy + x\, e^y \cos xy)\,,\\
\vec{H} &= (y, y^2 - x)\,.
\end{aligned}
$$

a) Probar que $\vec{G}$ es conservativo y que $\vec{H}$ no lo es. En el primer caso hallar un potencial.

b) Calcular la integral del campo $\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1\,,\ y \geq 0$, recorrida en el sentido positivo.

---

4. Sean

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\ ,\ 0 \leq z < 1\}\,,\quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,,\ z = 1\}\,.$$

Calcular la integral del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + e^{yz}, \sqrt{1 + x^2 + z^2}, x^2 + y^2 + z^2)$ sobre la superficie $S_1 \cup S_2$ orientada con la normal exterior.
