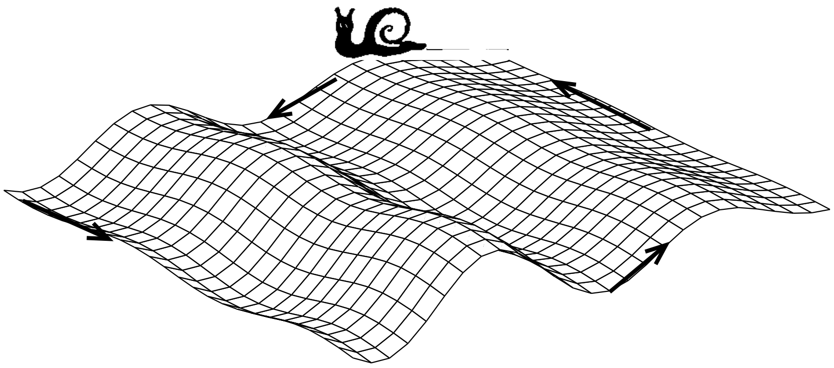
CÁLCULO III
(El cálculo de segundo es muy fácil)



Gauss

Maxwell

Stokes

Fernando Chamizo Lorente

2001

El contenido de estas notas incluye al temario de Cálculo III pero no coincide exactamente con él. Varía sobre todo en los dos últimos capítulos de los que previsiblemente sólo se estudiará la primera sección. Ante cualquier duda al respecto, preguntar al profesor correspondiente.

Índice

5. El teorema de Stokes y sus aplicaciones

Apéndice: Exámenes de cursos anteriores

Bibliografía comentada

De entre la bibliografía recomendada en años anteriores para Cálculo III, seguramente el texto que mejor se ajusta al actual temario sea:

[Ed] C.H. Edwards, Jr. "*Advanced Calculus of Several Variables*". Dover Publications, 1994.

Una diferencia es que el tratamiento del teorema de Stokes es mucho más completo y riguroso que el acomodable a un curso de un cuatrimestre. Además los alumnos más interesados pueden disfrutar con un capítulo final de introducción al cálculo de variaciones. La ausencia de este tema en algún curso de la licenciatura de Matemáticas en la UAM es, según han señalado algunos, una deficiencia notable.

Otra monografía de cálculo de varias variables en la misma línea que introduce el álgebra de las formas diferenciales para llegar a una versión general del teorema de Stokes, es

[Fl] W. Fleming. "*Functions of Several Variables*" (2nd Edition). Springer-Verlag 1977.

Comparativamente es algo más duro que el anterior para un principiante.

Un texto en español que puede ser muy útil durante la mayor parte del curso es:

[Ma] J.M. Mazón Ruiz. "*Cálculo diferencial.* (Teoría y problemas)". Mc Graw-Hill 1997.

Entre las ventajas que pueden encontrar los estudiantes están que contiene bastantes ejemplos y una larga colección de problemas, todos ellos resueltos. Además tiende a las explicaciones concretas y concisas. Su desventaja en este curso es que no cubre la parte del temario relativa a la integración.

Durante los tres últimos años, parece ser que el texto oficial para el curso de Cálculo III ha sido:

[Ma-Ho] J.E. Marsden, M.J. Hoffman. "*Análisis Clásico Elemental*". Addison-Wesley Iberoamericana 1998.

Quizá la razón es que está disponible en español o que es la continuación, en cuanto a primer autor se refiere, del libro oficial de Cálculo II, que también podría emplearse parcialmente ahora:

[Ma-Tr] J.E. Marsden, A.J. Tromba "*Cálculo Vectorial*". Addison-Wesley Iberoamericana 1998.

Sin embargo no parece que haya otras ventajas especiales en el primer texto, [**Ma-Ho**], porque una gran parte del temario queda fuera, y se supone que en este curso se intenta superar al segundo, [**Ma-Tr**], en cuanto a rigor y abstracción.

Un texto bastante particular es:

[**Sp1**] M. Spivak. "*Cálculo en variedades*". Reverté 1982.

Es difícil, o imposible, encontrar otro libro que en apenas 130 páginas introduzca rigurosamente todo el cálculo de varias variables necesario hasta completar la forma general del teorema de Stokes en subvariedades de $\mathbb{R}^n$. Esto conlleva algunos sacrificios, de modo que una parte de la teoría apela a los problemas propuestos y apenas hay espacio para ejemplos o divagaciones acerca de las ideas subyacentes. Por ello este libro puede ser durísimo para una primera lectura aunque interesante como manual de referencia. El mismo autor ha escrito también lo que se tomó durante muchos años como el texto oficial de Cálculo I en la UAM:

[**Sp2**] M. Spivak. "*Calculus* (Cálculo infinitesimal)". Vol. I y II. Reverté 1984.

Últimamente se ha dejado de usar, a veces, en dicha asignatura. Sin embargo, a más de 30 años de su primera edición, sigue siendo a juicio de algunos (quizá de la mayoría) un texto excepcionalmente bueno de cálculo de una variable, con una amplitud de miras y una selección de ejercicios difícilmente igualables.

Esta breve lista bibliográfica se podría extender casi indefinidamente porque no hay escasez de textos de cálculo de varias variables. Sin embargo el hacerlo conllevaría un esfuerzo y resultado que restarían todavía más sentido a estas notas, privando además al estudiante del saludable ejercicio de elegir sus favoritos en la biblioteca.

Como la presente asignatura la comparten otras licenciaturas pero tratada desde una perspectiva más práctica, no es difícil encontrar libros de problemas resueltos. Dos de ellos en español son:

[**Bo-Ro-Ve**] F. Bombal, J.L. Rodríguez, G. Vera. "*Problemas de análisis matemático*". Vol. I y II. AC 1988.

[**Ga-Lo-Ro-Ro-Vi**] A. García, A. López, G. Rodríguez, S. Romero. A. de la Villa. "*Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*". Clagsa 1996.

0. Notación y preliminares topológicos

En este capítulo previo mencionaremos algunos conceptos de convergencia que aparecieron en el curso pasado y se completarán en la asignatura de Topología, y, sobre todo, introduciremos la notación básica que se utilizará a lo largo de estas notas.

> *Retenía en mi memoria el nombre que los mayores daban a una cosa determinada. Y, cuando se movían a hacer alguna cosa, según la palabra pronunciada, entonces entendía que la cosa se llamaba por aquel nombre, porque así la llamaban cuando la querían mostrar.* Confesiones. Libro I, 8.

En este curso desarrollaremos el cálculo de varias variables y por tanto el espacio con el que trabajaremos es $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \, : \, x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2 \dots, n\}$. Podemos identificar los elementos de este conjunto con puntos o vectores (cuyas coordenadas con respecto a la base canónica son los x_i). Jugando con esta ambigüedad los representaremos en ambos casos mediante letras en negrita. En álgebra lineal los vectores se premultiplican por matrices, por ello, para ser coherentes habría que escribirlos como vectores columna, esto es,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{en vez de} \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

aunque por razones tipográficas rara vez se hace. Sin embargo no hay que perder de vista que la primera notación es imprescindible para interpretar correctamente algunas fórmulas como por ejemplo la regla de la cadena.

Hay un producto escalar natural definido en $\mathbb{R}^n$, considerado como espacio vectorial, y viene dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Nótese que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}$ donde el superíndice t indica la traspuesta.

La norma euclídea usual está asociada a este producto escalar, siendo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

y geométricamente indica la longitud (módulo) del vector $\mathbf{x}$. Esta norma induce una distancia en $\mathbb{R}^n$, considerado como espacio afín, asignando a cada par de puntos la longitud del vector que determinan, es decir,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}.$$

Lo cual es simplemente una forma de expresar nuestra fe en el teorema de Pitágoras. Fijado $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ se definen la bola abierta y la bola cerrada de centro $\mathbf{a}$ y radio ϵ, respectivamente como

$$B_\epsilon(\mathbf{a}) = \big\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \, : \, d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \epsilon\big\} \qquad \text{y} \qquad \overline{B}_\epsilon(\mathbf{a}) = \big\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \, : \, d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \le \epsilon\big\}.$$

Nótese que para $n=1$ representan un intervalo, para $n=2$ un círculo (disco) y para $n=3$ una esfera.

Es conveniente distinguir entre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ los que contienen a su frontera (cerrados) y los que no la contienen (abiertos). Aunque ésta sea la idea geométrica, es mucho más sencillo y operativo dar una definición que no haga ninguna referencia a la frontera.

DEFINICIÓN: *Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo $\mathbf{a} \in A$ existe una bola $B_\epsilon(\mathbf{a})$ totalmente contenida en A, y se dice que es cerrado si su complementario, $\mathbb{R}^n - A$, es abierto.*

Observación: Es fácil demostrar que la unión arbitraria de abiertos y la intersección finita de abiertos, es de nuevo un abierto. Estirando la definición se tiene que $\emptyset$ es abierto.

La idea es que dado un punto los abiertos a los que pertenece definen sus "alrededores", que es todo lo que necesitamos para estudiar propiedades locales. Por ejemplo, para tomar límites de la forma habitual necesitamos estar dentro de un abierto para poder acercarnos a cada punto en todas las direcciones.

DEFINICIÓN: *Se dice que $\mathcal{U}$ es un entorno (abierto) de $\mathbf{a}$, si es abierto y $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$.*

A lo largo del curso consideraremos funciones definidas de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, y para hacer hincapié en que $A \subset \mathbb{R}^n$ o en que A es un abierto de $\mathbb{R}^n$, escribiremos $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ó $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, respectivamente.

Recuérdese que se dice que $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $\mathbf{a}$ si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x})$ existe y coincide con $F(\mathbf{a})$. Recordando la definición de límite, esto es lo mismo que decir

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ \mathbf{b} \in B_\delta(\mathbf{a}) \ \Rightarrow \ \|F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})\| < \epsilon$$

(para $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ obviamente hay que imponer además $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$) y esto no es más que la traducción con símbolos rarísimos de "si estás suficientemente cerca de $\mathbf{a}$, tu imagen estará tan próxima como quieras a $F(\mathbf{a})$". El lenguaje de los abiertos permite dar una definición alternativa con grandes ventajas teóricas por la que uno puede olvidarse de los empalagosos ϵ y δ a cambio de dar un gran salto en la abstracción.

> *Todavía no acabo de entender hoy plenamente por qué aborrecía las letras griegas que siendo muchachito me enseñaban.* Confesiones. Libro I, 13.

Este proceso de abstracción culminará en la asignatura de Topología donde, con seguridad, más de uno añorará a ϵ y δ.

Proposición 0.1 : *Una función $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si para todo abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ se cumple $F^{-1}(\mathcal{U}) = A \cap \mathcal{V}$ para cierto abierto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$.*

Si A es abierto se obtiene inmediatamente

Corolario 0.2: *Una función* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es continua si y sólo si para todo abierto* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ *se cumple que* $F^{-1}(\mathcal{U})$ *es abierto en* $\mathbb{R}^n$.

Observación: Es importante darse cuenta de que en los resultados anteriores F^{-1} es la imagen inversa conjuntista (la de las primeras hojas del curso de Conjuntos y Números), la cual tiene sentido siempre, aunque F no sea inyectiva. Concretamente $F^{-1}(\mathcal{U}) = \{\mathbf{x} \in A : F(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}\}$.

<u>DEM.(de la Proposición)</u>:

$\Rightarrow$) Supongamos $F^{-1}(\mathcal{U})$ no vacío y tomemos $\mathbf{a} \in F^{-1}(\mathcal{U})$ arbitrario. Como $\mathcal{U}$ es abierto y $F(\mathbf{a}) \in \mathcal{U}$, para algún $\epsilon > 0$ se cumple $B_\epsilon(F(\mathbf{a})) \subset \mathcal{U}$. Por la definición de continuidad, para dicho ϵ existe un δ tal que $\mathbf{b} \in B_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ implica $F(\mathbf{b}) \in B_\epsilon(F(\mathbf{a})) \subset \mathcal{U}$, o lo que es lo mismo (piénsese un momento) $A \cap B_\delta(\mathbf{a}) \subset F^{-1}(\mathcal{U})$ y por consiguiente (piénsese dos momentos. Pista: doble inclusión)

$$F^{-1}(\mathcal{U}) = A \cap \bigcup_{\mathbf{a} \in F^{-1}(\mathcal{U})} B_\delta(\mathbf{a})$$

de donde se deduce $F^{-1}(\mathcal{U}) = A \cap \mathcal{V}$.

$\Leftarrow$) Tomando $\mathcal{U} = B_\epsilon(F(\mathbf{a}))$ se tiene que $F^{-1}\big(B_\epsilon(F(\mathbf{a}))\big) = A \cap \mathcal{V}$ donde $\mathcal{V}$ es un entorno abierto de $\mathbf{a}$. Entonces se puede elegir $B_\delta(\mathbf{a}) \subset \mathcal{V}$, con lo cual $B_\delta(\mathbf{a}) \cap A \subset F^{-1}\big(B_\epsilon(F(\mathbf{a}))\big)$ y al aplicar F en ambos miembros se obtiene la definición de continuidad. ■

Las ventajas teóricas de esta visión de la continuidad quedan ilustradas en la siguiente demostración "bi-lineal" (en dos líneas) de un resultado bien conocido.

Proposición 0.3: *Si* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y* $G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *son continuas, entonces* $H = G \circ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *también lo es.*

<u>DEM.</u>: Como F y G son continuas, si $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ es abierto, $G^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto y $H^{-1}(\mathcal{U}) = F^{-1}(G^{-1}(\mathcal{U}))$ es abierto. Por consiguiente H es continua. ■

Por último mencionaremos un concepto topológico de gran importancia, la <u>compacidad</u>. Resulta que en los llamados espacios topológicos (no hace falta saber qué es esto, es sólo para impresionar, ya que todos los espacios que conocemos lo son) existen unos subconjuntos, llamados compactos, que tienen buenas propiedades. Hay un famoso teorema (el teorema de Heine-Borel) que afirma que *en* $\mathbb{R}^n$ *los compactos son exactamente los cerrados y acotados.* Algunas de las propiedades buenas de las que goza un cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ por ser compacto son:

- Toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente.
- Si $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces alcanza un máximo y un mínimo.

Estas propiedades aparecerán en algún momento a lo largo del curso pero no se incluyen sus demostraciones. Como pretexto, en principio un estudiante aventajado podría completarlas con algún (¿mucho?) esfuerzo usando argumentos de tipo Bolzano-Weierstrass como los del curso pasado*. Por otra parte, basta esperar un cuatrimestre para estudiar en la asignatura de Topología la compacidad desde una perspectiva más amplia, obteniendo estos resultados con mayor generalidad. Además, si alguien es tan estricto que no acepta estas excusas y cree que en Matemáticas se debe entender todo de modo lineal y deductivo, debiera castigarse a aprender primero los axiomas que "definen" los conjuntos o los números naturales.

> *Me hiciste considerar que eran innumerables las cosas que yo creía, aunque no las hubiese visto ni me hubiese hallado presente cuando sucedieron. Así son muchas de las cosas narradas con todo detalle en las historias de los pueblos, las relativas a lugares y ciudades que yo no había visto y otras muchas que hacen referencia a amigos, médicos y otras clases de hombres. Si no las creyéramos no podríamos dar un paso en la vida.*
> Confesiones. Libro VI, 5.

Cuando la última propiedad de los compactos se aplica a la función, $f : K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = \|M\mathbf{x}\|$ donde M es una matriz $m \times n$, se concluye que la siguiente definición de <u>norma de una matriz</u> tiene sentido

$$|||M||| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|M\mathbf{x}\|.$$

Es muy fácil ver que $|||\cdot|||$ tiene las propiedades de una norma en el correspondiente espacio de matrices (véase **[Fl]** §4.3, Ej. 7), y utilizando herramientas del álgebra lineal se puede dar incluso una fórmula exacta para $|||M|||$ (es la raíz cuadrada del mayor autovalor de la matriz obtenida al premultiplicar M por su traspuesta). Pero en este curso sólo utilizaremos

$$\|M\mathbf{x}\| \le |||M|||\, \|\mathbf{x}\|,$$

que es una consecuencia trivial de la definición escribiendo $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)$.

* Si metemos K en un rectángulo cerrado y lo subdividimos por el proceso de Bolzano-Weierstrass (**[Sp2]**, Ej 25-5), podemos concluir que hay un punto p alrededor del que se *acumulan* infinitos términos de la sucesión. Necesariamente $p \in K$ porque en otro caso existiría $B_\epsilon(p) \subset \mathbb{R}^n - K$ (es abierto) que no contiene ningún término. No es difícil ver que si K no es cerrado o no es acotado, no satisface la primera propiedad, así que ésta equivale a la compacidad. Como las funciones continuas preservan las sucesiones convergentes, hacen lo propio con la compacidad, en particular las funciones definidas en compactos son acotadas. Sin embargo la inexistencia de máximo o mínimo de $F: K \longrightarrow \mathbb{R}$ implicaría que $f(x) = (F(x) - \sup F)^{-1}$ o $g(x) = (F(x) - \inf F)^{-1}$ no lo son

1. Diferenciación en varias variables

Recordemos la forma geométrica de introducir la derivada en Cálculo I. La derivada era justamente la pendiente de la recta que mejor aproxima a una curva en un punto: la recta tangente. Como la pendiente es el coeficiente de la x cuando se despeja la y, que la derivada en un punto valga $f'(a)$ significa que al incrementar la x un poquito, digamos h, la y se incrementa aproximadamente $f'(a)h$. Cuando subimos de dimensión, la situación no es completamente similar porque las variables pueden sufrir diferentes incrementos que se combinan de forma distinta para producir incrementos de la función. Desde el punto de vista geométrico esto es lógico porque los planos tangentes, hiperplanos tangentes, etc. en un punto no quedan determinados por un solo coeficiente. Todos conocemos el final de la historia: estos coeficientes dependen de las derivadas parciales que son como las usuales pero olvidándonos por un momento de que hay varias variables. En este curso, sin embargo, vamos a dar un giro abstracto a la derivación en varias variables con respecto a lo visto en el curso pasado. En lugar de considerar que la derivada son unos cuantos numeritos, pensaremos que es la propia aplicación lineal que relaciona los incrementos de las variables con los de la función. Ésta es la idea de diferencial.

Que sepamos hacer estas cosas tan raras no quiere decir que nos olvidemos de las fáciles y no perderemos en el cajón de la memoria lo que son las derivadas parciales ni cómo podemos desarrollar Taylor en varias variables o calcular máximos y mínimos. En este sentido, este capítulo será un repaso ampliado del curso anterior.

1.1. Definición y propiedades

En **[Ma]** se puede leer la cita de J. von Neumann: "Si la gente no se cree que las Matemáticas son simples es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida". Realmente es cierto, incluso fenómenos naturales relativamente simples conllevan modelos matemáticos complicados que muchas veces sólo son prácticos en situaciones idealizadas (a pesar de lo que diga el profesor de Modelización). Sin embargo tenemos la esperanza de que casi todo tenga una fórmula (al menos en el mundo físico) dada por una función "buena" que quizá dependa de muchísimas variables. Como las funciones "buenas" se aproximan bien por su plano (o lo que sea) tangente, es natural suponer que para pequeñas variaciones todo es lineal. Esto es muy apetecible porque dicen que el Álgebra Lineal es más fácil incluso que el Cálculo III, y porque puede ser útil numéricamente en los modelos ya que los ordenadores manipulan rápidamente los sistemas lineales. Nosotros dejaremos los modelos a los que sepan hacerlos y nos contentaremos en principio con estudiar la base matemática que permite aproximar por funciones lineales en lo infinitamente pequeño.

Definición: *sea* $f : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Se dice que* f *es* <u>*diferenciable*</u> *en* $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ *si existe una aplicación lineal* $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *comúnmente llamada* <u>*diferencial*</u> *y denotada por* $Df(\mathbf{a})$, *que satisface*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}=0.$$

Para no sobrecargar la notación, aquí $Df(\mathbf{a})\mathbf{h}$ abreviará $Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})$, esto es, el resultado obtenido cuando la aplicación $Df(\mathbf{a})$ actúa sobre $\mathbf{h}$.

La definición de diferencial nos dice que ésta es una aplicación lineal que aproxima perfectamente hasta orden uno los incrementos de la función en términos de los de las variables. Geométricamente (al menos en las dimensiones en las que podemos mirar), una función es diferenciable si vista con lupa es prácticamente plana.

Que la diferencial sólo puede existir si la función es continua parece bastante obvio, y realmente lo es, pero no está mal como primer resultado de un primer capítulo.

Proposición 1.1: *Si* $f:\mathcal{U}\overset{ab}{\subset}\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}\in\mathcal{U}$ *entonces* f *es continua en* $\mathbf{a}$.

<u>Dem.</u>: Según la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})\| \le & \|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\|+\|Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\| \\ \le & \left(\frac{\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}+|||Df(\mathbf{a})|||\right)\|\mathbf{h}\|,\end{aligned}$$

y por tanto $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})\|=0$, esto es, $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}f(\mathbf{a}+\mathbf{h})=f(\mathbf{a})$, que es la definición de continuidad. ■

Con la excusa de ilustrar este resultado veremos algún ejemplo que nos recuerde cómo se estudiaba en la práctica la continuidad. Pero antes enunciaremos otra miniproposición para los más exigentes:

Proposición 1.2: *Si la diferencial de una función en un punto existe, entonces es única.*

<u>Dem.</u>: Si hubiera dos diferenciales, digamos $Df(\mathbf{a})$ y $\widetilde{D}f(\mathbf{a})$, entonces para cierto vector $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ tomarían valores diferentes. Por la desigualdad triangular (en la forma $\|\mathbf{r}\|+\|\mathbf{s}\|\geq\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|$), escribiendo $\mathbf{h}=t\mathbf{v}$ con $t\neq 0$,

$$\frac{\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\|+\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\widetilde{D}f(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}\geq\frac{\|\widetilde{D}f(\mathbf{a})\mathbf{v}-Df(\mathbf{a})\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Pero por hipótesis el primer miembro se anula cuando $t\to 0$ mientras que el segundo es una constante estrictamente positiva. ■

<u>Ejemplo</u> . Estudiar si es continua y diferenciable en el origen la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2y^2/(x^4+7y^4)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y con $f(0,0)=0$.

Si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ entonces debe valer lo mismo a lo largo de todos los caminos que tienden al origen, sin embargo

$$\lim_{t\to 0}f(t,0)=0 \qquad \lim_{t\to 0}f(t,t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+7t^4}=\frac{1}{8}.$$

Como el límite no existe, f no puede ser continua en el origen ni tampoco, según hemos visto, diferenciable.

<u>Ejemplo</u> . Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=xy/\sqrt{3x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$.

Seguramente después de haber comprobado varios caminos que tienden al origen, uno se convence de que f es continua o el problema es difícil. Optando por la primera vía observamos que

$$0\leq|f(x,y)|\leq|x|\frac{|y|}{\sqrt{3x^2+y^2}}\leq|x|,$$

donde se ha usado que $\sqrt{\text{algo positivo}+y^2}\geq|y|$. De aquí se deduce que el límite de f cuando $(x,y)\to(0,0)$ es $0=f(0,0)$ y por consiguiente f es continua en $(0,0)$. Comprobar la diferenciabilidad es más difícil a este nivel. En principio sólo sabemos que si $Df(0,0)$ existe es una aplicación lineal $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Este tipo de aplicaciones actúan como $(x,y)\mapsto ax+by$ con a, b ciertas constantes, ya que con el lenguaje matricial del álgebra lineal

$$Df(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ax+by.$$

Si f es realmente diferenciable se debe cumplir

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-(ah_1+bh_2)|}{\|(h_1,h_2)\|}=0.$$

Sustituyendo y operando se llega a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left| \frac{h_1h_2}{\sqrt{3h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - \frac{ah_1+bh_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| = 0.$$

Escogiendo el camino $h_1=t$, $h_2=0$ se sigue que para que este límite exista es necesario que $a=0$. Simétricamente, con $h_1=0$, $h_2=t$ se llega a $b=0$. De lo cual se deduce que si f es diferenciable en $(0,0)$ entonces $Df(0,0)$ es la aplicación lineal nula y se debe tener

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{3h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0,$$

pero esto lleva a contradicción eligiendo el camino $h_1=h_2=t$ con $t\to 0$.

Para tranquilidad del lector, más adelante este ejercicio será más sencillo. El problema con la definición de diferenciabilidad es que da una idea teórica de su existencia y nos sugiere qué es la diferencial geométrica o analíticamente, pero se muestra muy poco eficiente para saber cuál es la diferencial de una función concreta.

> *Pero cuando oigo que son tres las categorías de preguntas –si la cosa existe, qué es y cuál es– retengo las imágenes de los sonidos de que se componen estas palabras. Y sé también que atraviesan el aire con estrépito y que ya no existen.* Confesiones. Libro X, 10.

Es cierto que, como en el caso de una variable, si sólo nos preocupan los cálculos prácticos la definición no es más que un rumor lejano. Pero para nosotros, teóricos empedernidos, es un estribillo que se repite en cada demostración. De todas formas no hay que exagerar, y el próximo resultado nos proporcionará algunos cálculos concretos y el que lo sigue permitirá extenderlos a prácticamente todas las funciones que se nos ocurran.

Proposición 1.3 : *Sea* $f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^m$.

a) Si f *es constante entonces* $Df(\mathbf{a})$ *es la aplicación lineal nula.*

b) Si f *es una aplicación lineal entonces* $Df(\mathbf{a})=f$.

c) Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ *las coordenadas de* f*, entonces* f *es diferenciable si y sólo si todas ellas lo son. Además en este caso las coordenadas de* $Df(\mathbf{a})\mathbf{x}$ *son* $Df_1(\mathbf{a})\mathbf{x}, Df_2(\mathbf{a})\mathbf{x}, \dots,$ $Df_n(\mathbf{a})\mathbf{x}$ *para todo* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$.

d) Si $m=2$, $n=1$, $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$ y $f(\mathbf{x})=x_1x_2$ con $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ entonces $Df(\mathbf{a})\mathbf{x}=a_2x_1+a_1x_2$.

e) Si $m=n=1$ entonces $Df(\mathbf{a})$ es la aplicación lineal $x\mapsto f'(a)x$ donde $f'(a)$ es la derivada usual en una variable.

<u>DEM.</u>: La parte a) es obvia y b) se sigue fácilmente de la definición de diferencial usando que por la linealidad

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})=f(\mathbf{a})+f(\mathbf{h})-f(\mathbf{a})=f(\mathbf{h}).$$

Para probar c) nótese que $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\le|x_1|+\ldots+|x_n|$. Así pues si las f_j son diferenciables, escogiendo $Df(\mathbf{a})$ como en el enunciado

$$0\le\frac{\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}\le\sum_{j=1}^{n}\frac{\|f_j(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f_j(\mathbf{a})-Df_j(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|},$$

y tomando límites se obtiene que f es realmente diferenciable. El recíproco pasa por observar que la diferenciabilidad de f implica que $\|\mathbf{h}\|^{-1}(f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-Df(\mathbf{a})\mathbf{h})\to\mathbf{0}$ cuando $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$, y la $j-$ésima componente de este límite es la definición de diferenciabilidad de f_j.

La prueba de d) se reduce a comprobar que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{|(a_1+h_1)(a_2+h_2)-a_1a_2-(a_2h_1+a_1h_2)|}{\|\mathbf{h}\|}=0.$$

Simplificando se tiene que la cantidad de la que estamos calculando el límite es

$$\frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=|h_1|\sqrt{\frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}\le|h_1|,$$

que obviamente tiende a cero.

Finalmente e) se reduce a la definición de derivada de una función de una variable escrita en la forma $(f(a+h)-f(a)-f'(a)h)/h\to0$. ∎

Naturalmente las funciones de varias variables suelen ser más complicadas que las que aparecen en el resultado anterior, que pueden considerarse como una especie de ladrillos básicos. La regla de la cadena nos permite saber qué ocurre cuando tenemos un edificio de dos plantas, e iterando podemos enfrentarnos a rascacielos.

Teorema 1.4 (regla de la cadena): *Sean* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : B \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *y* $\mathbf{a} \in A$ *tal que* $f(\mathbf{a}) \in B$. *Si* f *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y* g *es diferenciable en* $f(\mathbf{a})$ *entonces* $g \circ f$ *es diferencible en* $\mathbf{a}$ *y se cumple*

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a}).$$

Observación: Nótese que así escrita la regla de la cadena parece más natural que en su forma unidimensional; simplemente dice que la diferencial de una composición es la composición de diferenciales y eso, además de ser verdad, suena bien. Pero lo importante para nosotros es que es verdad porque lo podemos probar a continuación.

> *También yo era uno de sus admiradores y me embelesaba con su palabra, pero sabía ya distinguir entre la simple elocuencia y la verdad real, que era lo que yo ansiaba saber. No era tanto el plato de palabras que me ponía delante aquel tan famoso Fausto entre los maniqueos cuanto la comida de la ciencia lo que a mí me preocupaba.* Confesiones. Libro V, 3.

Dem.: Nuestras hipótesis son

$$(1.1) \qquad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \qquad \lim_{\widehat{\mathbf{h}}\to\mathbf{0}} \frac{\|\beta(f(\mathbf{a})+\widehat{\mathbf{h}})\|}{\|\widehat{\mathbf{h}}\|} = 0$$

donde

$$\alpha(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}), \qquad \beta(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - (g\circ f)(\mathbf{a}) - Dg(f(\mathbf{a}))(\mathbf{x} - f(\mathbf{a})).$$

Y queremos probar

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\gamma(\mathbf{a}+\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad \text{con} \quad \gamma(\mathbf{x}) = (g\circ f)(\mathbf{x}) - (g\circ f)(\mathbf{a}) - Dg(f(\mathbf{a}))\circ Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}).$$

La estrategia obvia es relacionar γ con α y β.

Un cálculo elemental prueba

$$(1.2) \qquad \gamma(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = Dg(f(\mathbf{a}))\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + \beta(f(\mathbf{a}+\mathbf{h})).$$

Utilizando (1.1) con $\widehat{\mathbf{h}} = f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ y la definición de límite, se deduce que para todo $\epsilon > 0$ si $\|\mathbf{h}\|$ (y por tanto $\|\widehat{\mathbf{h}}\|$ por la continuidad de f) es suficientemente pequeño

$$\|\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{h})\| \le \epsilon\|\mathbf{h}\| \qquad \text{y} \qquad \|\beta(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}))\| = \|\beta(f(\mathbf{a})+\widehat{\mathbf{h}})\| \le \epsilon\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})\|.$$

Aplicando la desigualdad triangular

$$\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})\| \le \|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\| + \|Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\|$$

y sustituyendo esta desigualdad en (1.2)

$$\|\gamma(\mathbf{a}+\mathbf{h})\| \le \epsilon|||Dg(f(\mathbf{a}))|||\,\|\mathbf{h}\| + \epsilon\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})\mathbf{h}\| + \epsilon|||Df(\mathbf{a})|||\,\|\mathbf{h}\|.$$

Dividiendo entre $\|\mathbf{h}\|$ y considerando que ϵ es arbitrariamente pequeño cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, se obtiene el resultado esperado. ■

Veamos un ejemplo muy poco interesante, porque la próxima sección sabremos hacerlo sin tantos miramientos. Al menos servirá para indicar cómo se combinan los resultados anteriores.

Ejemplo . Demostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x + \operatorname{sen}(xy), x + 3y)$ es diferenciable en todo punto.

Según el apartado $c)$ de la proposición 1.3 basta probar que $f_1(x, y) = e^x + \operatorname{sen}(xy)$ y $f_2(x, y) = x + 3y$ son diferenciables. Por $b)$, f_2 lo es. Por otra parte podemos escribir $f_1 = g \circ F$ con $g(x, y) = x + y$ y $F(x, y) = (e^x, \operatorname{sen}(xy))$. La función g es lineal y por tanto diferenciable. También se cumple que F es diferenciable ya que lo son sus componentes: $F_1(x, y) = e^x$ porque es la composición de la proyección $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con la exponencial en un variable, a las que se aplican $b)$ y $e)$; mientras que $F_2(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ es la composición de xy y $\operatorname{sen} x$ que son diferenciables por $d)$ y $e)$.

Naturalmente, empleando la fórmula de la regla de la cadena podríamos conseguir una fórmula para la aplicación lineal $Df(\mathbf{a})$ pero, también naturalmente, no lo haremos aquí.

1.2. Derivadas parciales y direccionales

En el curso de Álgebra Lineal se ponían muy pesados diciendo que una aplicación lineal no es una matriz y ni siquiera a cada aplicación lineal le correspondía una matriz sino típicamente infinitas, una en cada base; pero la verdad es que al final dijeran lo que dijeran casi todos los ejercicios de álgebra lineal se resolvían empleando matrices. En nuestra asignatura ocurrirá lo mismo con $Df(\mathbf{a})$, así que será primordial conocer su matriz en nuestra base preferida: la canónica. A este nivel no es un secreto cuál es el resultado, sobre todo cuando le anteponemos cierta definición.

Definición: *Sea* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, se llama* derivada parcial *de* F *en* $\mathbf{a}$ *con respecto a la* $i-$*ésima variable y se denota mediante* $D_iF(\mathbf{a})$ *ó* $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a})$*, al límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - F(\mathbf{a})}{h}$$

donde $\mathbf{e}_i$ *es el* $i-$*ésimo vector de la base canónica (todas sus coordenadas son nulas excepto la* $i-$*ésima que es uno).*

Observación: Una derivada parcial no es nada nuevo, su coordenada $j-$ésima no es más que la derivada de toda la vida de $F_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots a_m)$ en $x = a_i$. Es decir, basta sustituir todas las variables menos la $i-$ésima con respecto a la cual derivamos. Esta visión de la derivada parcial se muestra muy provechosa en la práctica si no queremos aburrirnos escribiendo límites.

La notación para las derivadas parciales $\partial F/\partial x_i$ es clásica y está tan sumamente extendida que difícilmente se verá desplazada por la notación moderna $D_i F$. A pesar de ello, sobre todo en los libros avanzados, muchos matemáticos tratan de evitar la notación clásica porque involucra algunas inconsistencias. Por ejemplo, cuando se aplica la regla de la cadena a la función $f(x(t), y(t))$, se suele escribir

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

pero entonces f significa dos cosas distintas en cada miembro de la igualdad (una función de una variable primero y una función de dos variables después). Además la x en la expresión $\partial f/\partial x$ indica una variable y sin embargo en dx/dt representa una función. Esta confusión entre variables y funciones en la notación clásica puede ser problemática si uno quiere derivar por ejemplo $f(x(t), x(t)y(t))$. Con la notación moderna no es necesario especificar el nombre de la variable, además no induce a pensar que algunas relaciones erróneas, como $\partial a/\partial b = 1/\partial b/\partial a$, son ciertas.

Ahora ya desvelamos el resultado que hemos escondido tras la antesala de un telón de teoría.

Teorema 1.5 : *Sea* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *diferenciable en* $\mathbf{a} \in A$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$. *La matriz de* $DF(\mathbf{a})$ *respecto a las bases canónicas de* $\mathbb{R}^m$ *y* $\mathbb{R}^n$, *llamada* *<u>matriz jacobiana</u>* *y denotada por* $F'(\mathbf{a})$, *es aquélla que tiene a* $D_iF_j(\mathbf{a})$ *como elemento* ji. *Es decir,*

$$F'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_1F_1(\mathbf{a}) & \dots & D_mF_1(\mathbf{a}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ D_1F_n(\mathbf{a}) & \dots & D_mF_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

<u>Dem.</u>: Por la proposición 1.3 c) con $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ la columna $i-$ésima de $F'(\mathbf{a})$ tiene coordenadas $F_1'(\mathbf{a})\mathbf{e}_i, \dots, F_n'(\mathbf{a})\mathbf{e}_i$, así que basta comprobar que $F_j'(\mathbf{a})\mathbf{e}_i = D_iF_j(\mathbf{a})$. Para ello consideramos, como en la observación anterior, $g(x) = F_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots a_m) = (F_j \circ p)(x)$ con $p(x) = \mathbf{a} + (x - a_i)\mathbf{e}_i$. La regla de la cadena implica que

$$Dg(a_i) = DF_j(\mathbf{a}) \circ Dp(a_i).$$

Aplicando la proposición 1.3 $e)$ a g y $a)$ y $b)$ a p, se tiene en términos "matriciales" $g'(a_i) = F'_j(\mathbf{a})\mathbf{e}_i$, que equivale a la igualdad buscada. ∎

El teorema anterior implica implícitamente que si una función es diferenciable en un punto todas las parciales existen en dicho punto. Sorprendemente el recíproco no es cierto. Veamos un ejemplo para irnos acostumbrando a esta injusticia.

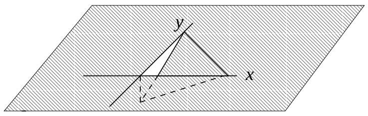
Ejemplo . Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy^2/(x^2+2y^4)$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Comprobar que no es diferenciable en el origen y sin embargo existen $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en $(0,0)$.

No es diferenciable porque, de hecho, f ni siquiera es continua en el origen

$$\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+2t^4} = \frac{1}{3} \neq f(0,0).$$

Según habíamos observado, las parciales $D_1 f(0,0)$ y $D_2 f(0,0)$ son las derivadas (usuales) de $f(x,0)$ y $f(0,y)$ en $x=0$ e $y=0$ respectivamente. Sin hacer el cálculo ambas son cero porque estas funciones son idénticamente nulas.

Geométricamente esta situación no es tan extraña. Por ejemplo, los bordes de un socavón pueden ser perfectamente rectos y perpendiculares convergiendo en el origen $(D_1 f(x,0) = D_1 f(0,y) = 0)$ y sin embargo la superficie de la carretera haber quedado discontinua.



Antes de volver sobre la relación entre las derivadas parciales y la diferenciabilidad debemos tomar un pequeño receso.

Recuérdese de Cálculo I que el teorema del valor medio afirmaba que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \text{para cierto } c \in [a,b].$$

Si $f(t)$ representa el espacio en función del tiempo el primer miembro es la velocidad media y el segundo la instantánea. A veces se ha ilustrado esto diciendo que si de aquí a Barcelona hay $600\,km$ y hemos tardado en coche 6 horas, en algún momento hemos ido a $100\,km/h$. La península tiene dos dimensiones (bueno tres, pero una muy pequeñita) así que el teorema del valor medio no debiera depender de que viajásemos de un punto unidimensional a otro. Donde no podemos ir es a Mallorca (a no ser que tengamos el coche de James Bond) porque no está unida con nosotros por carretera. Entonces todo lo que nos hace falta para escribir un teorema del valor medio en $\mathbb{R}^n$ es que la salida y la llegada se puedan conectar (véase **[Ma]** p. 54 para una versión más general que la incluida aquí).

Teorema 1.6 (del valor medio): *Sean* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ *y* $\mathcal{S}$ *el segmento que conecta* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$*. Si* $\mathcal{S} \subset A$ *y* f *es diferenciable en cada punto de* $\mathcal{S}$ *entonces existe* $c \in \mathcal{S}$ *tal que*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

<u>Dem.</u>: Sea $g(t) = f(\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t)$ y nótese que cuando $t \in [0,1]$ el argumento de f recorre $\mathcal{S}$. Por la regla de la cadena $g'(t) = Df(\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t)(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ y el resultado se sigue del teorema del valor medio unidimensional en $[0, 1]$. $\blacksquare$

Para funciones de una variable la relación entre el teorema del valor medio y la definición de derivada es clara: si hacemos el intervalo $[a, b]$ muy pequeño alrededor de un punto p (digamos que a y b son p y $p + h$) se obtiene en el límite la definición de $f'(p)$, es decir, la velocidad media pasa a ser la instantánea cuando el intervalo de tiempo es infinitesimal.

> *De hecho el único tiempo que se puede llamar presente es un instante, si por tal concebimos lo que no se puede dividir en fracciones por pequeñas que sean. Y un instante tan corto como éste pasa tan rápidamente del futuro al pasado que su duración es apenas imperceptible. Si su duración se prolongara podría dividirse en pasado y futuro. Cuando es presente no tiene duración o extensión.* Confesiones. Libro XI, 15.

De la misma forma, el teorema del valor medio en varias variables nos permite obtener en el límite una velocidad instantánea una vez especificado el segmento en el que nos movemos. Ésta es la idea de la derivada direccional (véanse otras interpretaciones en **[Ed]** p. 65). Por analogía con nuestra definición de derivada parcial la daremos para funciones $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en vez de, como hacen muchos autores, para funciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta distinción resultará irrelevante incluso para los puristas.

Definición: *Sean* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $\mathbf{a} \in A$ *y* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$*. Se llama* <u>*derivada direccional*</u> *de* f *en el punto* $\mathbf{a}$ *y la dirección* $\mathbf{v}$ *a*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

Observación: De nuevo, la derivada direccional no es más que la derivada usual de $g(x) = f(\mathbf{a} + x\mathbf{v})$ en $x = 0$, y la $i-$ésima derivada parcial es la derivada direccional cuando $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$.

La regla de la cadena implica que si f es diferenciable en $\mathbf{a}$ entonces

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = g'(0) = Df(\mathbf{a})\mathbf{v}$$

(pero, de nuevo, la existencia de las derivadas direccionales no asegura la diferenciabilidad). En particular si $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})\, v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{a})\, v_m = \nabla f \cdot \mathbf{v}$$

donde ∇f es el <u>vector gradiente</u>, que tiene como coordenadas las derivadas parciales de f.

Observación: Algunos autores consideran que $\mathbf{v}$ debe ser siempre un vector de norma 1 (porque debe indicar sólo una *dirección*) y si no lo es lo normalizan, con lo cual la fórmula anterior puede transformarse en $\nabla f \cdot \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ en algunos libros.

<u>Ejemplo</u> . Hallar la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ con $\mathbf{v} = (3, 4)$ y $\mathbf{a} = (0, 0)$ para $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy + \pi) + (1 + x + y)^2 + x$.

Es fácil comprobar que las parciales son $D_1f(\mathbf{a}) = 3$ y $D_2f(\mathbf{a}) = 2$, así que $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17$.

Con esto damos paso al teorema que nos libra muchas veces de aplicar la definición para comprobar la diferenciabilidad.

Teorema 1.7 : *Sea* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{a} \in A$. *Si todas las derivadas parciales son continuas en* $\mathbf{a}$ *entonces* F *es diferenciable en* $\mathbf{a}$.

<u>DEM.</u>: Por la proposición 1.3 c) podemos suponer $n = 1$. Dado $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ sean

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}_1 = (h_1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{h}_2 = (h_1, h_2, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad \mathbf{h}_m = \mathbf{h}.$$

Escribiendo la suma *telescópica* (más bien *cataléjica*: cada término queda absorbido por el anterior)

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} \big(F(\mathbf{a} + \mathbf{h}_i) - F(\mathbf{a} + \mathbf{h}_{i-1})\big)$$

y aplicando el teorema del valor medio, se llega a

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{m} DF(\mathbf{c}_i)(\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} D_iF(\mathbf{c}_i)h_i$$

con $\mathbf{c}_i$ perteneciente al segmento que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{h}$.

Por continuidad $|D_iF(\mathbf{c}_i) - D_iF(\mathbf{a})| < \epsilon$ si $\|\mathbf{h}\|$ es suficientemente pequeño. Así pues

$$\begin{aligned}|F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a})\mathbf{h}| =& |F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{m} D_iF(\mathbf{a})h_i| \\ =& \Big|\sum_{i=1}^{m} \big(D_iF(\mathbf{c}_i) - D_iF(\mathbf{a})\big)h_i\Big| \le \epsilon \sum_{i=1}^{m} |h_i|.\end{aligned}$$

Como $|h_i| \le \|\mathbf{h}\|$, al dividir entre $\|\mathbf{h}\|$ la diferenciabilidad de F se deduce eligiendo ϵ arbitrariamente pequeño.

■

La continuidad de las derivadas parciales es una condición suficientemente común como para recibir un nombre especial.

Definición: *Sea* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Se dice que* <u>*F pertenece a* C^1</u>*, y se escribe* $F \in C^1$ *ó* $F \in C^1(A)$*, si todas las derivadas parciales de* F *son continuas en* A*. En general, se dice que* <u>*F pertenece a* C^n</u> *si todas las derivadas parciales pertenecen a* C^{n-1}*, y que* <u>*F pertenece a* C^∞</u> *si* $F \in C^n$ *para todo* n*.*

Dicho de otra forma: C^1 es el conjunto de funciones con derivadas parciales continuas y C^n, con $n > 1$, el conjunto de funciones con derivadas parciales en C^{n-1}. Además C^∞ es la intersección de todos los C^n.

Tras los resultados que culminan con el teorema anterior, nuestro "algoritmo" para probar que una función es diferenciable pasa primero por comprobar si es continua y si existen las derivadas parciales y direccionales, en caso negativo no es diferenciable. Si supera esta prueba veremos si las parciales son continuas, en caso afirmativo es diferenciable. Finalmente, como último recurso está la definición, para aplicarla podremos aprovechar que la matriz jacobiana es la matriz de derivadas parciales.

La diferenciabilidad de $f(x,y) = (e^x + \operatorname{sen}(xy), x+3y)$ estudiada en un ejemplo anterior es ahora obvia porque $\frac{\partial f}{\partial x} = (e^x + y\cos(xy), 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = (x\cos(xy), 3)$ son funciones continuas. Los más críticos pueden notar, con razón, que lo único que hacemos es pasar la "obviedad" un paso más atrás: antes f era diferenciable porque comprobamos cuidadosamente que era composición de funciones sencillas diferenciables y ahora lo es porque no comprobamos que ciertas funciones son continuas por ser composición de otras funciones que eran continuas el curso pasado.

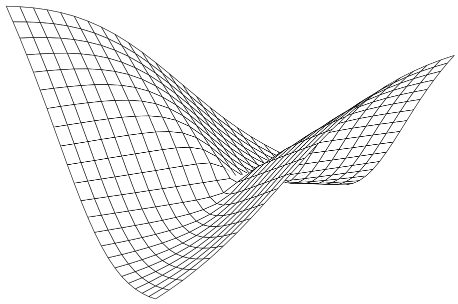
Veamos un ejemplo más genuino.

<u>Ejemplo</u> . Estudiar si $f(x,y) = (x^2 + 2xy)/\sqrt{x^2+y^2}$ si $(x,y) \ne (0,0)$ y $f(0,0) = 0$ es diferenciable en el origen.

Como $|x|/\sqrt{x^2+y^2}$ está acotada en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ es fácil ver que f es continua. Podemos estudiar la existencia de parciales y direccionales al mismo tiempo (las primeras son un caso especial de las segundas). Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ entonces $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0}) = g'(0)$ con $g(t) = f(t\mathbf{v})$. Se tiene

$$g(t) = \frac{t^2 v_1^2 + 2t^2 v_1 v_2}{\sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}} = |t| \frac{v_1^2 + 2v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

donde se ha usado para simplicar que $\sqrt{t^2} = |t|$. El valor absoluto no es derivable en cero, por tanto $g'(0)$ no existirá, excepto cuando $v_1^2 + 2v_1 v_2 = 0$, y f no es diferenciable.



Geométricamente lo que ocurre es que la función es "picuda" en $(0,0)$ en casi todas las direcciones.

1.3. Máximos y mínimos

En los cursos de cálculo de una variable una de las primeras aplicaciones que se daban de la derivada era el estudio de máximos y mínimos. Aquí procederemos de la misma forma, a través del teorema de Taylor en varias variables, y si miramos con los ojos de ver nos percataremos de que la teoría es exactamente la misma que en el caso de una variable aunque en la práctica es más fácil saber si una cantidad es positiva o negativa que saber si lo es la forma cuadrática asociada a varias cantidades.

Comencemos introduciendo las derivadas parciales de orden superior. Con la notación moderna nuevas derivaciones se indican con nuevos subíndices de D que se añaden de derecha a izquierda. Por ejemplo:

$$D_{12} f = D_1(D_2 f), \qquad D_{1121} f = D_1(D_1(D_2(D_1 f))).$$

Con la notación clásica se añaden en el denominador nuevos símbolos ∂x_i poniendo un exponente si aparecen repetidos. Además en el numerador el número de veces que se deriva aparece como exponente. Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigg(\frac{\partial}{\partial x}\bigg(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\bigg)\bigg).$$

Un resultado nada trivial, que de hecho requiere alguna hipótesis de regularidad, implica que el orden en que se deriven las variables es indiferente.

Teorema 1.8: *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$*. Si* $f \in C^2$ *entonces* $D_{ij}f = D_{ji}f$ *para todo* $1 \le i, j \le m$*.*

<u>Dem.</u>: Ya que sólo vamos a derivar con respecto a dos variables podemos suponer $m = 2$, $i = 1$, $j = 2$. También podemos suponer, examinando cada vez una coordenada, que $n = 1$. (De nuevo estas reducciones no son imprescindibles pero permiten simplificar la demostración).

Fijado $\mathbf{a} \in A$ consideremos la función definida en un entorno de $\mathbf{0}$ por

$$F(h_1, h_2) = g(h_1, h_2) - g(0, h_2) \qquad \text{con } g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) - f(\mathbf{a} + (x_1, 0)).$$

Por el teorema del valor medio se tiene que para algún $\mathbf{c} = (\alpha h_1, h_2)$, $\alpha \in [0, 1]$,

$$F(\mathbf{h}) = Dg(\mathbf{c})(h_1, 0) = D_1 g(\mathbf{c}) h_1 = \big(D_1 f(\mathbf{a} + (\alpha h_1, h_2)) - D_1 f(\mathbf{a} + (\alpha h_1, 0))\big) h_1.$$

Una nueva aplicación del teorema del valor medio a esta última diferencia implica de la misma forma que

$$F(\mathbf{h}) = D_2 D_1 f(\mathbf{a} + (\alpha h_1, \beta h_2)) h_1 h_2 = h_1 h_2 D_{21} f(\mathbf{a} + (\alpha h_1, \beta h_2)) \tag{1.3}$$

para algún $\beta \in [0, 1]$.

Es fácil comprobar con la definición que

$$F(h_1, h_2) = \widetilde{g}(h_1, h_2) - \widetilde{g}(h_1, 0) \qquad \text{con } \widetilde{g}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) - f(\mathbf{a} + (0, x_2)).$$

Por tanto repitiendo el razonamiento anterior (nótese que el papel desempeñado por ambas variables está intercambiado) se llega a

$$F(\mathbf{h}) = h_1 h_2 D_{12} f(\mathbf{a} + (\widetilde{\alpha} h_1, \widetilde{\beta} h_2)) \qquad \text{con } \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in [0, 1].$$

Comparando con (1.3) llegamos a que para h_1, h_2 no nulos

$$D_{21} f(\mathbf{a} + (\alpha h_1, \beta h_2)) = D_{12} f(\mathbf{a} + (\widetilde{\alpha} h_1, \widetilde{\beta} h_2)).$$

Usando la continuidad de $D_{12}f$ y $D_{21}f$ se llega a que ambos coinciden en $\mathbf{a}$ sin más que tomar límites $(h_1, h_2) \to (0, 0)$. ∎

Veamos que la condición $f \in C^2$ no es superflua con el ejemplo que viene en todos los libros.

Pensaba que los autores de los libros tenían más autoridad. Confesiones. Libro IV, 3.

Ejemplo . Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$. Comprobar que $D_{12}f(0,0)\neq D_{21}f(0,0)$.

Nótese que $D_{12}f(0,0)$ quiere decir "deriva con respecto de x la función $D_2f(x,0)$ y sustituye el resultado en cero". Así que primero calculamos $D_2f(x,0)$. Si $x=0$ trivialmente $D_2f(0,0)=0$ porque $f(0,y)$ es idénticamente nula. Si $x\neq 0$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+xy\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big).$$

Sea cual sea la derivada que hemos dejado indicada, al sustituir $y=0$ quedará afectada por un coeficiente nulo, obteniéndose $D_2f(x,0)=x$ para todo x, y de aquí $D_{12}f(0,0)=1$. Por otra parte de $f(x,y)=-f(y,x)$ se sigue por la regla de la cadena $D_1f(x,y)=-D_2f(y,x)$, en particular, $D_1f(0,t)=-D_2f(t,0)=-t$ y por tanto $D_{21}f(0,0)=-1$.

El teorema de Taylor en varias variables es una consecuencia directa de su análogo en una variable (dar un vistazo a la demostración) aunque el enunciado parece mucho más complicado si no se emplean notaciones especiales ([**Ma**] p. 85).

Teorema 1.9: *Sea $f:A\overset{ab}{\subset}\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $f\in C^{k+1}$ y $\mathbf{a}\in A$. Considérese el polinomio de Taylor en $\mathbf{a}$ de grado k*

$$T_kf(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})+\frac{1}{1!}\sum_{j_1=1}^{n}D_j(\mathbf{a})h_{j_1}+\frac{1}{2!}\sum_{j_1,j_2=1}^{n}D_{j_1j_2}(\mathbf{a})h_{j_1}h_{j_2}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{k!}\sum_{j_1,j_2,\dots,j_k=1}^{n}D_{j_1j_2\dots j_k}(\mathbf{a})h_{j_1}h_{j_2}\dots h_{j_k}$$

donde $\mathbf{h}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$. Entonces si el segmento $\mathcal{S}$ que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x}$ está totalmente contenido en A, se tiene que

$$f(\mathbf{x})-T_kf(\mathbf{x})=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j_1,j_2,\dots,j_{k+1}=1}^{n}D_{j_1j_2\dots j_{k+1}}(\mathbf{c})h_{j_1}h_{j_2}\dots h_{j_{k+1}}$$

para algún $\mathbf{c}\in\mathcal{S}$.

DEM.: Sea ϕ la función de una variable dada por $\phi(t)=f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$. Por la regla de la cadena

$$\phi'(0)=\sum_{j=1}^{n}D_j(\mathbf{a})h_{j_1},\qquad \phi''(0)=\sum_{j_1,j_2=1}^{n}D_{j_1j_2}(\mathbf{a})h_{j_1}h_{j_2},\quad \dots\ \text{etc.}$$

y el teorema se deduce del teorema de Taylor en una variable con el resto de Lagrange ([**Sp2**] p. 514). ■

Tras estos pequeños prolegómenos pasamos al tema principal de esta sección: los máximos y mínimos.

DEFINICIÓN: *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se dice que* f *alcanza un* *máximo local* *(o relativo) en* $\mathbf{a} \in A$ *si existe un entorno* $\mathcal{U} \subset A$ *de* $\mathbf{a}$ *tal que* $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. *De la misma forma se dice que* f *alcanza un* *mínimo local* *(o relativo) en* $\mathbf{a} \in A$ *si* $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{a})$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

Observación: A los máximos y mínimos locales se les suele llamar en general extremos locales.

DEFINICIÓN: *Sean* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\mathbf{a} \in A$. *Se dice que* $\mathbf{a}$ *es un* *punto crítico* *de* f *si* f *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y* $Df(\mathbf{a})$ *es nula.*

Observación: Nótese que esto se puede escribir como $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

La conexión entre estas definiciones es la misma que en el caso de una variable.

Teorema 1.10 : *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciable en todo punto de* A. *Si en* $\mathbf{a} \in A$ *se alcanza un máximo local o un mínimo local entonces* $\mathbf{a}$ *es un punto crítico de* f.

DEM.: Sea $\mathbf{e}_1$ el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Consideremos la función de una variable $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1)$. Esta función alcanzará un máximo o un mínimo local en $t = 0$ si f lo alcanza en $\mathbf{a}$, y por lo que sabemos de Cálculo I, $g'(0) = 0$. La regla de la cadena implica

$$0 = g'(0) = Df(\mathbf{a})\mathbf{e}_1 = D_1 f(\mathbf{a}).$$

Si reemplazamos $\mathbf{e}_1$ por $\mathbf{e}_j$ con j arbitrario, tenemos que $Df(\mathbf{a})$ es la aplicación lineal nula (aplica todos los elementos de la base en 0). ■

Ahora la teoría de Cálculo I nos decía que se podía distinguir si en un punto crítico se alcanzaba un máximo o un mínimo mirando el signo de la derivada segunda siempre que ésta no se anulase. Veamos qué quiere decir ahora esto.

DEFINICIÓN: *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. *Se llama* *matriz hessiana* *de* f *en* $\mathbf{a} \in A$ *a la matriz simétrica*

$$\mathcal{H}f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & \dots & D_{1n}f(\mathbf{a}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ D_{n1}(\mathbf{a}) & \dots & D_{nn}f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

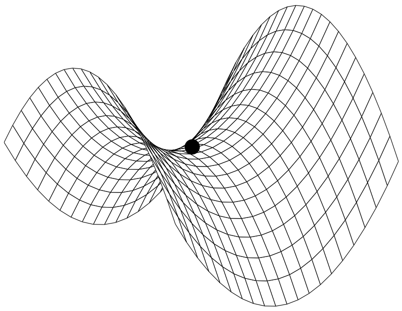
Y se dice que $\mathbf{a} \in A$ *es un* *punto crítico no degenerado* *si es punto crítico y el determinante de esta matriz (a veces llamado* *hessiano**) no se anula.*

Si nos restringimos a puntos críticos no degenerados todo funciona como hace un año.

Teorema 1.11 : *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ *y supongamos que* $\mathbf{a} \in A$ *es un punto crítico no degenerado, entonces*

$$f \text{ alcanza un máximo local en } \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathcal{H}f(\mathbf{a}) \text{ es definida negativa}$$
$$f \text{ alcanza un mínimo local en } \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathcal{H}f(\mathbf{a}) \text{ es definida positiva}$$

Un punto crítico no degenerado que no es máximo ni mínimo se dice que es un punto de silla. En ese caso $\mathcal{H}f(\mathbf{a})$ es indefinida.



Antes de dar la demostración recordemos algunas cosas de Álgebra Lineal y quizá de Geometría I. En primer lugar, se dice que una matriz simétrica es definida positiva o definida negativa si la forma cuadrática correspondiente lo es. Recuérdese que completando cuadrados toda forma cuadrática no degenerada se podía escribir en cierta base como $\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2$; si todos los signos son positivos entonces es definida positiva y si todos son negativos es definida negativa. Hay un criterio, el *criterio de Sylvester* para caracterizar estas situaciones usando determinantes. Si se llama Δ_k al determinante obtenido a partir de una matriz simétrica no singular $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ después de suprimir las $n-k$ últimas filas y columnas, el criterio de Sylvester asegura que

$$A \text{ es definida positiva} \Leftrightarrow \Delta_k > 0 \quad \text{para todo } 1 \le k \le n$$
$$A \text{ es definida negativa} \Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k > 0 \quad \text{para todo } 1 \le k \le n$$

Remitimos al lector a cualquier libro de álgebra lineal para la prueba de estos resultados, aquí nos ocuparemos sólo de la del teorema.

DEM.: Por el teorema de Taylor en varias variables (nótese que $D_j f(\mathbf{a}) = 0$ por ser $\mathbf{a}$

punto crítico)

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}f(\mathbf{c})h_ih_j. \tag{1.4}$$

Como $f \in C^2$ y $\mathbf{a}$ es no degenerado, podemos encontrar un entorno de $\mathbf{a}$ de manera que $\mathcal{H}f(\mathbf{c})$ tenga el mismo carácter que $\mathcal{H}f(\mathbf{a})$ (ambas positivas, negativas o indefinidas) para todo $\mathbf{c}$ en dicho entorno. La definición de máximo y mínimo local aplicada a (1.4) equivale a decir que la forma cuadrática del segundo miembro es no positiva o no negativa, respectivamente. Según hemos dicho lo mismo ocurre con $\mathcal{H}f(\mathbf{a})$, que al ser no singular debe ser definida negativa o definida positiva, respectivamente. ■

¿Qué hacer con los puntos críticos degenerados con $\det \mathcal{H}f(\mathbf{a}) = 0$? En principio, como en el caso de la variable habría que usar el desarrollo de Taylor y examinar derivadas de orden superior, pero esto puede ser muy complicado teórica y prácticamente. Por ello es difícil (¿imposible?) encontrar en los libros de cálculo de varias variables un estudio de algún punto crítico degenerado que no sea trivial o que no se reduzca a un vistazo a (1.4). Aquí "vistazo" quiere decir que si el segundo miembro es para algunos $\mathbf{h}$ negativo y para otros positivo, obviamente en $\mathbf{a}$ no puede alcanzarse ni un máximo ni un mínimo.

Veamos un ejemplo del caso no degenerado tomado de **[Ma]** p. 95.

Ejemplo . Hallar los puntos de la gráfica de la función $g(x, y) = (xy)^{-1}$ que están más cercanos al origen.

La función que da la distancia de $(x, y, g(x, y))$ a $(0, 0, 0)$ es

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (xy)^{-2}}$$

que está bien definida (y es diferenciable) en el abierto $A = \mathbb{R}^2 - \{xy = 0\}$. Minimizar la función es lo mismo que minimizar el cuadrado de la función. Esto es un truco ingenioso que no es en absoluto imprescindible pero permite librarnos de escribir varias raíces cuadradas. Así que consideramos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}.$$

Que el problema esté bien propuesto implica que existen puntos en los que se alcanzan mínimos locales. Si hubiera varios escogemos el menor. Los puntos críticos verifican

$$\nabla f = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0,\; 2y - \frac{2}{y^3x^2} = 0 \underset{\text{(cálculos)}}{\Rightarrow} x = \pm 1,\; y = \pm 1.$$

Los cálculos omitidos son muy sencillos por ejemplo multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y y restando. Hay por tanto cuatro puntos críticos y como f toma el mismo valor, 3, en todos ellos basta comprobar el caracter de cualquiera (que debe ser mínimo si el problema está bien propuesto), por ejemplo $(1,1)$. En ese caso

$$\mathcal{H}f(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 8 > 0,\ \Delta_2 = 8 \cdot 8 - 4 \cdot 4 > 0.$$

Por tanto $\mathcal{H}f(1,1)$ es definida positiva y se alcanza un mínimo. Los puntos buscados son entonces, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ y $(-1,-1,1)$.

El péndulo y el método de Euler

Material:

- Una cuerda larga, fina y ligera.
- Un objeto pesado, a ser posible poco voluminoso y simétrico.
- Un cronómetro o un reloj con segundero.
- Una calculadora (a ser posible programable).

Objetivos: Comprobar con el péndulo simple que, como hemos mencionado en este capítulo, los fenómenos físicos en pequeños intervalos (vistos con lupa) se comportan linealmente. Esta idea es tan precisa que incluso nos permitirá hacer algunas predicciones en algo tan poco lineal como el movimiento de un péndulo.

El experimento: Colgando el objeto de la cuerda y fijando el extremo libre de ésta en algún lugar elevado de manera que pueda oscilar libremente, obtenemos un péndulo. Manejaremos los datos de un experimento real* en el que la longitud de la cuerda era $182\,m$ y la separación inicial de la vertical $50\,cm$, pero cada uno puede y debe utilizar las medidas que correspondan a su experimento.

De acuerdo con el cronómetro, el péndulo necesitó $20\,s$ para dar 7 oscilaciones completas (14 medias oscilaciones), tras lo cual apenas se había amortiguado. Con lo cual el siguiente valor del semiperiodo es bastante aproximado

$$\frac{T}{2} = \frac{20}{14} = 1'4\ldots s.$$

Un poco de Física: Sobre el objeto pesado actúa la fuerza de la gravedad mg (el peso). al descomponerla en su componentes perpendicular a la cuerda, F, y paralela a ella, F', vemos que podemos despreciar F' (porque la cuerda es inextensible) y sólo la primera contribuye al movimiento.

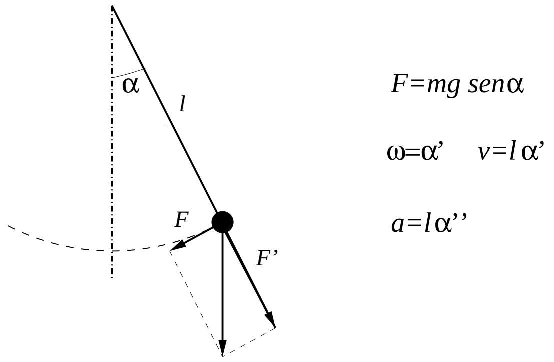
Si $\alpha = \alpha(t)$ es el ángulo en radianes que forman la cuerda y la vertical, simple trigonometría muestra que $F = mg \operatorname{sen} \alpha$. Por otra parte la velocidad del objeto viene

* *N. del A.* Utilicé como objeto un pequeño trofeo desarmado y como cuerda una de pastelería. Sostuve la cuerda del péndulo con papel adhesivo en un mueble saliente. Es importante que la cuerda sea larga para que el periodo sea medible y que el objeto sea pesado pero pequeño de manera que la fricción del aire no cause amortiguamiento demasiado rápido (según la ley de Stokes el rozamiento aerodinámico de un cuerpo esférico es proporcional al radio y a la velocidad).

dada por $v = \omega \cdot l = l\,\alpha'(t)$ donde l es la longitud de la cuerda. Entonces

$$F = ma \qquad \Rightarrow \qquad -mg \operatorname{sen}\alpha = ml\frac{d\alpha'}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha'' + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\alpha = 0}$$

(el signo menos en la fuerza se debe a que va en la dirección contraria que el ángulo). Ésta es la ecuación que regula el movimiento del péndulo.



Los cálculos: Se puede probar que la ecuación del péndulo no admite solución en funciones elementales, así que no hay que perder el tiempo buscando un cambio de variable milagroso. Como en este capítulo hemos hablado más de derivadas primeras que de las de orden superior, definamos

$$x = \alpha, \qquad y = \alpha'$$

(lo cual tiene perfecto sentido física y matemáticamente: es pasar al plano de fases). Con lo cual la ecuación del péndulo se escribe como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Si verdaderamente en pequeños intervalos todo es lineal, definiendo $f(t) = (x(t), y(t))$ se tiene para h pequeño

$$f(t+h) - f(t) \approx Df(t)h \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} h.$$

Sustituyendo en (1.5) se llega a que

$$\begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y(t) \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x(t) \end{pmatrix}.$$

Es decir

$$\begin{cases} x(t+h) \approx x(t) + h\, y(t) \\ \\ y(t+h) \approx y(t) - \dfrac{g}{l} h \operatorname{sen} x(t) \end{cases}$$

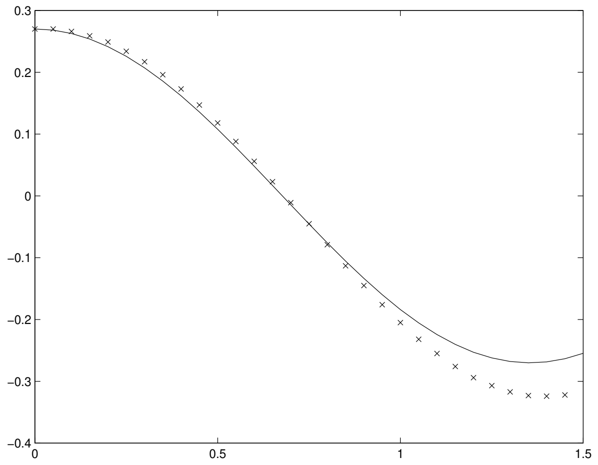
Ahora con esta ley de recurrencia, a partir de los valores iniciales, podemos aproximar tanto como queramos el movimiento del péndulo tomando h suficientemente pequeño. Éste es el famoso método de Euler de cálculo numérico. Por ejemplo, tomando $h = 0'05$ con los valores iniciales $x(0) = \arctan \frac{50}{182} \approx 0'27$, $y(0) = 0$ (el péndulo parte del reposo y lo separamos inicialmente $50\,cm$ de su posición inicial), se tiene con ayuda de una calculadora la siguiente tabla:

$(x(0),y(0))\approx(0'27,0)$	$(x(0'5),y(0'5))\approx(0'118,-0'608)$	$(x(1),y(1))\approx(-0'205,-0'531)$
$(x(0'05),y(0'05))\approx(0'27,-0'072)$	$(x(0'55),y(0'55))\approx(0'088,-0'640)$	$(x(1'05),y(1'05))\approx(-0'232,-0'477)$
$(x(0'1),y(0'1))\approx(0'266,-0'144)$	$(x(0'6),y(0'6))\approx(0'056,-0'663)$	$(x(1'1),y(1'1))\approx(-0'255,-0'415)$
$(x(0'15),y(0'15))\approx(0'259,-0'214)$	$(x(0'65),y(0'65))\approx(0'023,-0'678)$	$(x(1'15),y(1'15))\approx(-0'276,-0'347)$
$(x(0'2),y(0'2))\approx(0'249,-0'283)$	$(x(0'7),y(0'7))\approx(-0'011,-0'684)$	$(x(1'2),y(1'2))\approx(-0'294,-0'273)$
$(x(0'25),y(0'25))\approx(0'234,-0'349)$	$(x(0'75),y(0'75))\approx(-0'045,-0'681)$	$(x(1'25),y(1'25))\approx(-0'307,-0'196)$
$(x(0'3),y(0'3))\approx(0'217,-0'412)$	$(x(0'8),y(0'8))\approx(-0'079,-0'669)$	$(x(1'3),y(1'3))\approx(-0'317,-0'114)$
$(x(0'35),y(0'35))\approx(0'196,-0'470)$	$(x(0'85),y(0'85))\approx(-0'113,-0'648)$	$(x(1'35),y(1'35))\approx(-0'323,-0'030)$
$(x(0'4),y(0'4))\approx(0'173,-0'522)$	$(x(0'9),y(0'9))\approx(-0'145,-0'617)$	$(x(1'4),y(1'4))\approx(-0'324,0'055)$
$(x(0'45),y(0'45))\approx(0'147,-0'569)$	$(x(0'95),y(0'95))\approx(-0'176,-0'578)$	$(x(1'45),y(1'45))\approx(-0'322,0'141)$

El semiperiodo corresponde al momento en el que el péndulo deja de ir hacia la izquierda y empieza a ir hacia la derecha, es decir, $y(T/2) = \alpha'(T/2) = 0$. Así que según la tabla anterior ocurrirá en algún instante entre $1'35$ y $1'4$, lo cual coincide con mucha precisión con el experimento real, y podríamos obtener mejores resultados con h menor. Es realmente notable que se llegue tan lejos simplemente utilizando que la solución de la ecuación se puede aproximar bien por rectas. Además la tabla anterior permite estimar la velocidad del péndulo en cada instante, la cual no es sencilla de medir directamente.

Para el caso de oscilaciones pequeñas que es más o menos el del experimento descrito, hay otra forma bien conocida y muy sencilla de llevar a cabo una aproximación lineal. Consiste en usar simplemente que $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$ para α pequeño con lo cual la ecuación del péndulo se transforma en $\alpha'' + g\alpha/l = 0$, que con las condiciones iniciales $\alpha(0) = \alpha_0$,

$\alpha'(0) = 0$, tiene como solución exactamente a $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(t\sqrt{g/l}\,)$. Es interesante comparar la gráfica de esta función con los valores antes obtenidos para $x(t)$. Como es de esperar, cuantas más iteraciones hagamos más se acumulan los errores (pero podemos disminuirlos tomando h pequeño y es posible probar que la aproximación converge a la solución real en el límite).



Cuando las oscilaciones son muy grandes (por ejemplo $\alpha(0) > \pi/4$) el experimento ya no se ajusta a la fórmula $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(t\sqrt{g/l}\,)$ pero nuestras humildes iteraciones con h pequeño siguen siendo efectivas.

Utilizando herramientas matemáticas más poderosa podemos conseguir mejores aproximaciones con menos esfuerzo computacional. Sin embargo la recurrencia introducida anteriormente nos muestra claramente hasta qué punto son poderosas en el mundo físico las aproximaciones lineales cuando los incrementos son pequeños.

2. El teorema de la función inversa y sus consecuencias

En este capítulo vamos a ver uno de los resultados más importantes del curso: el teorema de la función inversa. Reservaremos para más tarde el grueso del "discurso" que explica sus excelencias y motivación, pero avanzaremos aquí que permite decidir si se puede deshacer un cambio de variable de manera diferenciable. Esto es algo tan básico que llevados por el entusiasmo, los matemáticos han elevado algunos de sus corolarios al rango de teoremas.

2.1. El teorema de la aplicación contractiva

Por si la breve apología anterior se quedara corta, la mayoría de los autores (y nosotros no vamos a ser menos) prueban el teorema de la función inversa apelando al teorema de la aplicación contractiva, que es uno de los resultados de la licenciatura con mayor número de aplicaciones teóricas y prácticas. Se puede decir sin exageración que sustenta una parte apreciable de los métodos del cálculo numérico. En definitiva, puede que este teorema no nos haga mejores, más felices o correspondidos por la persona amada, pero seguramente para que el hombre fuera al espacio hubo que aplicarlo muchas veces y se usa cuando nos hacen algunas TAC (casualmente iniciales del teorema).

> *Dones tuyos son la inteligencia y el ingenio con que investigan estas cosas. Por medio de ellos han descubierto muchas de ellas, prediciendo, con muchos años de anticipación, los eclipses del sol y de la luna antes de que sucedieran. Calcularon el día y la hora, si el eclipse había de ser total o parcial, sin que nunca les fallara el cálculo, pues siempre sucedió tal y como lo habían anunciado.*
>
> *Los hombres que no conocen estos poderes se admiran y pasman. Y los que los saben se glorían y desvanecen y con impía soberbia se apartan de tu luz y desfallecen. Y aunque pueden predecir con mucha antelación un eclipse del sol no pueden ver que todavía siguen en la sombra del eclipse.* Confesiones. Libro V, 3.

Antes de leer el enunciado, los que se hayan saltado el capítulo preliminar deben saber que en $\mathbb{R}^n$ la palabra *compacto* es sólo una abreviatura para cerrado y acotado.

Teorema 2.1 (de la aplicación contractiva): *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \longrightarrow K$ una función tal que existe $0 < C < 1$ con $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ (tales funciones se llaman contractivas), entonces existe un único punto de K que permanece fijo por f y viene dado por el límite de la sucesión*

$$\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0), \qquad \mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1), \qquad \mathbf{x}_3 = f(\mathbf{x}_2), \qquad \mathbf{x}_4 = f(\mathbf{x}_3), \qquad \dots$$

para cualquier $\mathbf{x}_0 \in K$.

Observación: La hipótesis de que K sea compacto puede ser relajada considerablemente. En realidad el teorema es cierto para cualquier función contractiva definida en un espacio métrico completo (cualquier sitio en el que haya una forma de medir y las sucesiones de Cauchy coincidan con las convergentes). Por ejemplo, se cumpliría para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contractiva.

<u>Dem.</u>: A lo más existe un punto fijo, porque si $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y} = f(\mathbf{y})$, se llega a $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ con $0 < C < 1$, que sólo puede ser cierto si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Dado cualquier $\mathbf{x}_0$, la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe tener, por la compacidad, una subsucesión $\{\mathbf{x}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a cierto límite $\mathbf{a}$. Para cada n elijamos $m_k > n$, entonces al ser f contractiva $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{m_k}\| \le C\|\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_{m_k-1}\| \le \ldots \le C^n\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{m_k-n}\|$. Y se tiene

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| \le \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{m_k}\| + \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{a}\| \le C^n\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{m_k-n}\| + \|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{a}\|.$$

Cuando $n \to \infty$, C^n y $\|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{a}\|$ tienden a cero, con lo cual $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$. Finalmente nótese que necesariamente $\mathbf{a}$ debe ser un punto fijo porque al tomar límites en $\|f(\mathbf{a}) - \mathbf{x}_n\| \le C\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_{n-1}\|$ se tiene $\|f(\mathbf{a}) - \mathbf{a}\| = 0$. ■

¿Por qué es tan importante este sencillo resultado? Por muchas razones, pero si hubiera que citar sólo una, diríamos que porque permite resolver ecuaciones, a veces en contextos realmente insospechados.

<u>Ejemplo</u> . Supongamos que para cierto cálculo científico tenemos que resolver la ecuación

$$\frac{1}{x+1} + \cos x = \frac{3}{2}. \tag{2.1}$$

Para ello consideramos la función $g(x) = 1/(x+1) + \cos x - 3/2$ y observamos que es obvio que no tiene ceros para $x < -1$ ni para $x > 1$ (porque $|\cos x| \le 1$). Por otra parte g es decreciente en $(-1, 1]$ así que a lo más su gráfica corta una vez al eje X. Aplicando el teorema de Bolzano podemos ser un poco más precisos y deducir de $g(1) < 0 < g(0)$ que (2.1) tiene su única solución en $[0, 1]$. Podríamos enseñarle a un ordenador a aplicar Bolzano en intervalos cada vez menores (método de la bisección) para "acorralar" a la solución pero entonces este ejemplo estaría fuera de lugar. ¿Dónde aparece aquí la función contractiva? Se fabrica artificialmente, observando que $x = r$ es solución de $g(x) = 0$ si y sólo si $x = r$ es un punto fijo de $f(x) = x + g(x)$. Para comprobar que realmente F es contractiva en $K = [0, 1]$ se aplica el teorema del valor medio

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| = \big|1 - (1+\xi)^{-2} - \operatorname{sen}\xi\big||x-y| \le |\operatorname{sen} 1||x-y|$$

y se observa que $|f(x) - f(0'5)| \le |\operatorname{sen} 1||x - 0'5| \le 0'5 \operatorname{sen} 1$ implica que $0'12 \le f(x) \le 0'97$, en particular $f(K) \subset K$. Después de todas estas complicaciones, según el teorema de la aplicación contractiva, la simple recurrencia

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{1+x_n} + \cos x_n - \frac{3}{2}$$

converge a la solución para cualquier $x_0 \in [0,1]$. Con $x_0 = 0$ se obtiene

$$x_1 = 0'5,\ x_2 = 0'544249\dots,\ x_3 = 0'547329\dots,\ x_4 = 0'547521\dots,\ x_5 = 0'547533\dots$$

Se puede probar que cerca de la solución la constante de contractividad disminuye notablemente, lo que se traduce desde el punto de vista computacional en que la convergencia de los x_n se acelera. Un alumno aventajado quizá podría explicar por qué en cada paso se obtiene aproximadamente una nueva cifra decimal correcta de la solución de (2.1).

En el ejemplo anterior la elección de f es relevante, por ejemplo, $f(x) = x - g(x)$ también tiene a la solución de (2.1) como punto fijo, pero no es contractiva en ningún intervalo que la contenga. Los analistas numéricos son muy avispados y saben mil y un métodos para hacer que una función sea contractiva y así resolver casi cualquier ecuación. Veamos uno de los más famosos y poderosos.

<u>Ejemplo (Método de Newton)</u>. Supongamos que queremos hallar una solución $x = r$ de $g(x) = 0$ donde g es dos veces diferenciable y $g'(r) \neq 0$, entonces el método de Newton afirma que existe un intervalo cerrado I con $r \in I$ tal que la sucesión definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

converge a r para cualquier $x_0 \in I$.

Considerando $f(x) = x - g(x)/g'(x)$ es evidente que $f(r) = r$ así que la justificación del método se reduce a comprobar que f es contractiva en algún I. De nuevo por el teorema del valor medio

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| = \left|1 - \frac{(g')^2(\xi) - g''(\xi)g(\xi)}{(g')^2(\xi)}\right||x-y| = \left|\frac{g''(\xi)g(\xi)}{(g'(\xi))^2}\right||x-y|.$$

Como $g(r) = 0$ y $g'(r) \neq 0$, en cierto $I = [r-\epsilon, r+\epsilon]$ podemos hacer que $|g''g/(g')^2|$ sea tan pequeño como queramos, en particular menor que uno. Además $|f(x)-r| = |f(x)-f(r)| \leq |x-r| \leq \epsilon$ implica que $f(I) \subset I$.

Observación: El método de Newton tiene una interpretación geométrica sencilla, comprobando que x_n se obtiene como el corte de la tangente a la gráfica de g en $x = x_{n-1}$ con el eje X. Con ella no es difícil convencerse de la convergencia en un intervalo suficientemente pequeño que contenga a la raíz.

2.2. El teorema de la función inversa

Comencemos con una humilde función real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, cuya derivada no se anula en cierto punto $x = a$. Supongamos $f'(a) > 0$ (el caso $f'(a) < 0$ es análogo) entonces f es creciente en un entorno de a, digamos $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ y la restricción $f : (a-\epsilon, a+\epsilon) \longrightarrow (f(a-\epsilon), f(a+\epsilon))$ es una función biyectiva (probarlo con rigor requiere el teorema de Bolzano), por consiguiente existe una "función inversa" f^{-1} definida en estos intervalos (más adelante diremos que es una *inversa local*), y de hecho es continua. Algunas manipulaciones del cociente incremental implican que f^{-1} es derivable (véase **[Sp2]** Cap. 12) mientras que por la regla de la cadena

$$f(f^{-1}(t)) = t \;\Rightarrow\; f'(f^{-1}(t))(f^{-1})'(t) = 1 \;\Rightarrow\; (f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$$

en el dominio de definición de f^{-1}. De esta fórmula se deduce que la no anulación de f' es necesaria para que exista $(f^{-1})'$. En definitiva, se tiene que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, entonces f tiene una inversa diferenciable en un entorno de $x = a$ si y sólo si $f'(a) \neq 0$. Además se cumple $(f^{-1})'(t) = 1/f'(f^{-1}(t))$.

El teorema de la función inversa afirma algo similar en varias variables, es decir, para funciones $F \in C^1$ definidas de $\mathbb{R}^n$ (o un abierto suyo) en $\mathbb{R}^n$. En principio la fórmula para la derivada sigue cumpliéndose por la regla de la cadena

$$(F \circ F^{-1}) = \mathrm{I} \;\Rightarrow\; DF(F^{-1}(\mathbf{t})) \circ DF^{-1}(\mathbf{t}) = \mathrm{I} \;\Rightarrow\; DF^{-1}(\mathbf{t}) = \big(DF(F^{-1}(\mathbf{t}))\big)^{-1}.$$

Ahora se presenta como condición necesaria que DF tenga inversa, o lo que es lo mismo, que el determinante jacobiano no se anule. Sin embargo no podemos copiar la palabrería inicial del caso de dimensión uno porque para $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ no tiene sentido ser creciente o decreciente o estudiar el signo de la derivada, con lo cual no sabemos si realmente existe la inversa en algún abierto. Éste es el principal escollo para probar el (difícil) teorema de la función inversa. La solución será fabricar para cada $\mathbf{y}$ una aplicación contractiva que resuelva la ecuación $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, además habrá que probar cierta regularidad en la dependencia de $\mathbf{y}$ de la solución.

Es importante insistir sobre el punto señalado en el párrafo anterior: lo esencial del teorema de la función inversa <u>no</u> es la fórmula $DF^{-1}(\mathbf{t}) = \big(DF(F^{-1}(\mathbf{t}))\big)^{-1}$, la cual se deduce fácilmente de la regla de la cadena una vez sabemos que ambos miembros existen, sino la conclusión bajo ciertas hipótesis de que realmente F^{-1} y DF^{-1} tienen sentido en ciertos abiertos. Es un resultado fundamentalmente matemático que da una justificación rigurosa (ni breve ni fácil, por cierto) de la sencilla fórmula que ocupa una línea en los libros de cálculo de otras carreras. Puede que esto suene ridículo en un curso como segundo en el que se producen los primeros choques con el rigor, pero se supone que uno estudia una licenciatura de Ciencias, en este caso Matemáticas, para tratar de saber el porqué de las cosas, aunque quizá eso sea imposible por muchas carreras y doctorados que hagamos.

> *Quedé abrumado al recordar detenidamente el tiempo que había pasado desde mis diecinueve años. Fue entonces cuando empecé por primera vez a buscar con ansia la verdad y la sabiduría y todavía no había abandonado la vana esperanza y engañosa necedad que mantenía mis fútiles ambiciones, a pesar de haberme decidido a abandonarlas, si encontraba la sabiduría. Ahora tenía ya treinta años y me encontraba en la misma ciénaga, ávido de goces de este mundo que no hacían más que engañarme y agotarme.*
> Confesiones. Libro VI, 11.

Comencemos por dar un nombre a las inversas en un abierto.

Definición: *Sea* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *se dice que* $G : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ *es una* <u>*inversa local*</u> *de* F *si* $\mathcal{U} \subset A$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ *son abiertos no vacíos tales que*

$$(F \circ G)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \;\; \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{V} \qquad y \qquad (G \circ F)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \;\; \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$

Observación: Nótese que la función $G : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ no es otra cosa que la inversa de la restricción $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$. Muchas veces, como acabamos de hacer, se nombra igual a F y a su restricción a ciertos abiertos (una notación más correcta sería muy aparatosa) y continuando el abuso de notación se escribe F^{-1} en vez de G. Así lo hicimos en las explicaciones previas, pero a partir de ahora trataremos de esquivar esta notación para evitar confusiones.

Ahora, por fin, el anunciado teorema fundamental de este capítulo y de una buena parte del curso.

Teorema 2.2 (de la función inversa): *Sea* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(A)$, *y sea* $\mathbf{a} \in A$. *Si* $DF(\mathbf{a})$ *es invertible entonces existe una inversa local* $G : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ *con* $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ *y* $G \in C^1(\mathcal{V})$. *Además para todo* $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ *cumple*

$$DG(\mathbf{y}) = \big(DF(G(\mathbf{y}))\big)^{-1}.$$

Para descargar un poco su prueba y centrarnos en la parte esencial agruparemos todos los flecos de la demostración en un resultado auxiliar.

Lema 2.3: *Sea* $F : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(A)$. *Supongamos que tiene una inversa local continua* $G : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ *y que* $DF(\mathbf{x})$ *es invertible para todo* $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. *Entonces, de hecho,* $G \in C^1(\mathcal{V})$ *y se cumple la fórmula*

$$DG(\mathbf{y}) = \big(DF(G(\mathbf{y}))\big)^{-1} \qquad \text{para todo } \; \mathbf{y} \in \mathcal{V}.$$

Observación: Nótese que el lema afirma que en contra de lo que repetía el profesor de primero, la continuidad implica la diferenciabilidad; pero claro, estamos en una situación muy especial por la hipótesis adicionales que se imponen.

Dem.(del lema): Como en el caso unidimensional (véase el libro de Cálculo I), la diferenciabilidad se prueba manipulando adecuadamente el cociente incremental

$$L = \frac{\|G(\mathbf{b}+\mathbf{k}) - G(\mathbf{b}) - \big(DF(G(\mathbf{b}))\big)^{-1}\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{k}\|}.$$

El lema se reduce a demostrar que $\lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} L = 0$ para cada $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$, ya que con ello se obtiene, por definición, que G es diferenciable y la fórmula del enunciado. Además de esta última se deduce que las parciales de G son continuas.

Definamos $\mathbf{a} = G(\mathbf{b})$ y $\mathbf{h} = G(\mathbf{b}+\mathbf{k}) - G(\mathbf{b})$, entonces

$$L = \frac{\|\mathbf{h} - (DF(\mathbf{a}))^{-1}(F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}))\|}{\|F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a})\|}.$$

Ahora está claro para qué hemos hecho estos cambios de nombre: tras ellos L depende de F que es la función cuya regularidad conocemos. Claramente $L = L_1L_2$ donde

$$L_1 = \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a})\|} \qquad \text{y} \qquad L_2 = \frac{\|(DF(\mathbf{a}))^{-1}(F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a})) - \mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Por continuidad, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$. De la desigualdad

$$L_2 \le |||(DF(\mathbf{a}))^{-1}|||\frac{\|F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}$$

y la diferenciabilidad de F, se sigue $\lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} L_2 = 0$. De nuevo por la diferenciabilidad, dado $\epsilon > 0$, para $\|\mathbf{k}\|$ suficientemente pequeño se tiene

$$L_1^{-1} = \frac{\|DF(\mathbf{a})\mathbf{h} + F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \ge \Big\|DF(\mathbf{a})\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\Big\| - \epsilon.$$

Como $\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$ pertenece a la frontera de la bola unidad que es un compacto, entonces $\big\|DF(\mathbf{a})\mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|\big\|$ alcanza un mínimo m para algún $\mathbf{h}$, y $m \neq 0$ porque $DF(\mathbf{a})$ es no singular ($\operatorname{Ker} DF(\mathbf{a}) = \{\mathbf{0}\}$). Tomando $\epsilon = m/2$ se deduce $L_1 \le 2/m$ y por tanto $\lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} L = \lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} L_1L_2 = 0$, como queríamos demostrar. ■

Dem.(del teorema de la función inversa): Con traslaciones adecuadas se puede suponer $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, además aplicando $(DF(\mathbf{0}))^{-1}$ se puede suponer también $DF(\mathbf{0}) = \mathrm{I}$.

Quien no haya entendido nada de estas líneas, que se crea o compruebe que las hipótesis anteriores simplemente se hacen para escribir menos y el caso general es idéntico con los cambios adecuados.

Sea $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}$ con $\mathbf{y}$ fijado. Como $DF(\mathbf{0}) = \mathrm{I}$ y $f \in C^1$, existe una bola $\overline{B}_\epsilon(\mathbf{0}) \subset A$ en que $\det F'(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ ($DF(\mathbf{x})$ es no singular) y $|||f'||| = |||I - F'|||$ es tan pequeño como queramos, digamos $n|||f'||| \le 1/2$. Comprobemos que f define para cada $\mathbf{y} \in B_{\epsilon/2}(\mathbf{0})$ una función contractiva $f : \overline{B}_\epsilon(\mathbf{0}) \longrightarrow \overline{B}_\epsilon(\mathbf{0})$. Como en los ejemplos anteriores aplicamos el teorema del valor medio, pero esta vez en forma vectorial a cada coordenada de f, obteniendo

$$\|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})\| \le \sum_{i=1}^{n} |||f'(\xi)|||\, \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \tag{2.2}$$

Esta misma desigualdad con $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, prueba que $f\big(\overline{B}_\epsilon(\mathbf{0})\big) \subset \overline{B}_\epsilon(\mathbf{0})$.

Del teorema de la aplicación contractiva se deduce por tanto que para cualquier $\mathbf{y} \in B_{\epsilon/2}(\mathbf{0})$ existe un único $\mathbf{x} \in \overline{B}_\epsilon(\mathbf{0})$ tal que $\mathbf{x} = \mathbf{x} - F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}$, esto es, $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Con esto hemos construido una función $G : B_{\epsilon/2}(\mathbf{0}) \longrightarrow \overline{B}_\epsilon(\mathbf{0})$ que cumple $F(G(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y} \in B_{\epsilon/2}(\mathbf{0})$. Las siguientes desigualdades prueban que G es continua, y de hecho Lipschitz. La primera es simplemente la triangular y la segunda es análoga a (2.2)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \ge & \|G(\mathbf{y}_1) - G(\mathbf{y}_2)\| - \|G(\mathbf{y}_1) - F(G(\mathbf{y}_1)) - \big(G(\mathbf{y}_2) - F(G(\mathbf{y}_2))\big)\| \\ \ge & \|G(\mathbf{y}_1) - G(\mathbf{y}_2)\| - \frac{1}{2}\|G(\mathbf{y}_1) - G(\mathbf{y}_2)\|\end{aligned}$$

Ahora hay que hacer un último “regate” de naturaleza técnica, porque queríamos que G fuera una inversa local $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ con $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertos, y sin embargo tenemos $G : B_{\epsilon/2}(\mathbf{0}) \longrightarrow \overline{B}_\epsilon(\mathbf{0})$ con $F(G(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$. Para terminar la prueba tomemos como $\mathcal{U}$ cualquier entorno de cero $\mathcal{U} \subset B_{\epsilon/2}(\mathbf{0})$ tal que $G(\mathcal{U}) \subset B_\epsilon(\mathbf{0})$ (tal $\mathcal{U}$ existe porque G es continua) y $\mathcal{V} = F^{-1}(\mathcal{U}) \cap B_\epsilon(\mathbf{0})$, que también es abierto por ser F continua. Es evidente que G es sobreyectiva cuando se restringe a $G : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ y por tanto $F(G(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ implica, aplicando G y escribiendo $\mathbf{x} = G(\mathbf{y})$, que $G(F(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. ■

Veamos algunos ejemplos y contraejemplos.

Ejemplo . Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^2 - 4y^2, 4xy)$. Caracterizar los puntos alrededor de los cuales F tienen una inversa local diferenciable y hallar su matriz jacobiana en el punto que corresponde a $(x, y) = (1/2, 1)$.

En primer lugar calculamos el jacobiano de F y comprobamos que $DF(\mathbf{a})$ sólo es singular en el origen:

$$\begin{vmatrix} 2x & -8y \\ 4y & 4x \end{vmatrix} = 8x^2 + 32y^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x, y) = (0, 0).$$

Por el teorema de la función inversa, todo punto distinto del origen tiene un entorno en el cual existe una inversa local diferenciable. En un entorno del origen esto es imposible porque, según hemos visto, de la regla de la cadena se seguiría $DG(\mathbf{y}) = \big(DF(G(\mathbf{y}))\big)^{-1}$ y DF no es invertible en $(0, 0)$. Según esta fórmula sustituida en $\mathbf{y} = F(1/2, 1) = (-15/4, 2)$, se tiene

$$G'(-15/4, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuestra intuición nos dice que si existe una inversa local en un entorno de todo punto, juntando todos los "trozos" podríamos fabricar una inversa de verdad, global (al menos de la función restringida a su imagen). Sorprendentemente esto no es cierto, como veremos a continuación.

<u>Ejemplo</u>. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Probar que F satisface las hipótesis del teorema de la función inversa para cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ y sin embargo no tiene función inversa definida en todo $\mathbb{R}^2$, esto es, $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \mathrm{I}$.

Es inmediato que el jacobiano es positivo

$$\begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \operatorname{sen}^2 y = e^{2x} > 0.$$

Sin embargo $F(0, 0) = F(0, 2\pi)$ por tanto F no es inyectiva y no puede tener inversa en ningún abierto que contenga a estos dos puntos.

La paradoja del ejemplo anterior proviene de que sólo podemos *ver* las funciones $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cuando $n = 1$ y para éstas $F \in C^1$ y $F'(x) \neq 0$ implican que F es monótona y por tanto inyectiva, de modo que $F : \mathbb{R} \longrightarrow F(\mathbb{R})$ es invertible. Es interesante (aunque difícil) entender qué tienen de especial las funciones que no podemos ver, $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

con $n \geq 2$, para que se produzca esta curiosa situación.

Descubrimos así que aprender las cosas –cuyas imágenes no captamos a través de los sentidos– equivale a verlas interiormente en sí mismas tal como son, pero sin imágenes. Confesiones. Libro X, 11.

La explicación tiene que ver con que a base de añadir nuevos eslabones no podemos volver al punto inicial de una cadena metida en $\mathbb{R}$ porque es unidimensional, sin embargo en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, sí es posible después de seguir una trayectoria curva. Esto se traduce en que la extensión de una inversa local puede obligar a que tome diferentes valores en un mismo punto. Por ejemplo, para invertir el cambio de polares a cartesianas, si decimos que el ángulo subtendido por el punto $(1,0)$ es 0, $\theta(1,0) = 0$, entonces por continuidad la función θ debe ser pequeña cerca de $(1,0)$, lo que obliga a que a los puntos $(1,-\epsilon)$ les corresponda un ángulo negativo, pero al extender θ a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo se obliga a que $\theta(1,-\epsilon)$ tenga un valor próximo a 2π.

Para terminar veremos un ejemplo sencillo de naturaleza teórica.

Ejemplo . Probar que si se añade a las hipótesis del teorema de la función inversa $F \in C^n(A)$, con $n \geq 2$, entonces $G \in C^n(\mathcal{V})$.

Como sabemos (por el teorema) que $G \in C^1$, si suponemos $F \in C^2$ se tendrá, por la fórmula $DG(\mathbf{y}) = \big(DF(G(\mathbf{y}))\big)^{-1}$, que G tiene derivadas parciales que son C^1, es decir $G \in C^2$. En general, derivando la fórmula se tiene que las derivadas parciales de orden n de G se expresan como derivadas parciales de orden n de F y otras de orden inferior de G, por tanto si $F \in C^n$ y $G \in C^{n-1}$ entonces $G \in C^n$, y el resultado se sigue por inducción.

¿Hay una manera sencilla de explicar el significado del teorema de la función inversa a ese amigo nuestro que se quedó estancado en primero? Sacrificando el rigor, le podemos convencer de que es un teorema sensato preguntándole cómo despejaría $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y} = M\mathbf{x}$ donde M es una matriz $n \times n$. Si no es un caso perdido responderá $\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{y}$ añadiendo quizá que eso es posible sólo si $\det M \neq 0$. Entonces es nuestro turno: le diremos que al igual que las funciones diferenciables $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se aproximan bien por sus rectas tangentes, las funciones diferenciables $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se aproximan por funciones lineales cuya matriz es la jacobiana de F. La aproximación es muy buena cuando estamos muy cerca del punto base, así que es lógico que F admita una inversa en un pequeño entorno si esta matriz la admite.

Por ejemplo, la función

$$F(x,y,z) = (x + xy + \operatorname{sen}(xyz) + e^{y+z} - 1, x^2 - y^2 - z^2 + \operatorname{sen}(y(z+1)), x^3 + y^2 + z)$$

es muy complicada, pero aproximándola por Taylor de orden uno en el origen se tiene simplemente

$$F(x,y,z) \approx \mathbf{0} + F'(\mathbf{0})\mathbf{x} = (x+y+z, y, z).$$

Esta aproximación es buena cuando x, y, z son pequeños. Así se tiene

$$F(0'1, 0'1, 0'1) = (0'3324\ldots, 0'0997\ldots, 0'111) \approx (0'3, 0'1, 0'1).$$

El teorema de la función inversa nos dice que como podemos invertir la matriz $F'(\mathbf{0})$, también podemos invertir localmente F, y dicha inversa local, G, estará aproximada en el sentido anterior de la siguiente forma

$$G(x,y,z) \approx (F'(\mathbf{0}))^{-1}\mathbf{x} = (x-y-z, y, z).$$

Numéricamente

$$G(0'3324\ldots, 0'0997\ldots, 0'111) \approx (0'1, 0'1, 0'1) \approx (0'1216\ldots, 0'0997\ldots, 0'111).$$

2.3. El teorema de la función implícita y los teoremas del rango

El teorema de la función implícita es una generalización del teorema de la función inversa y que se deduce sin mucha complicación a partir de él. La diferencia entre ambos estriba en que en el teorema de la función inversa teníamos n variables expresadas en función de otras n y queríamos despejar (más bien saber si se podían despejar) estas últimas, mientras que en el teorema de la función implícita tenemos n ecuaciones con un número indeterminado de variables y queremos despejar n de ellas. En el enunciado llamaremos $\mathbf{y}$ al vector de las variables que queremos despejar y $\mathbf{x}$ al resto. Con una notación un poco abusiva, $f'_{\mathbf{x}}$ y $f'_{\mathbf{y}}$ indicarán las matrices jacobianas de la función f que definen las ecuaciones cuando se supone que $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}$ están fijas, respectivamente. El *truco* de la demostración es completar las ecuaciones con otras ficticias y así obtener un cambio de variable que se pueda tratar con el teorema de la función inversa.

Teorema 2.4 (de la función implícita): *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *con* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$ *y sea* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A$ *tal que* $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. *Si* $f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *es no singular entonces existen* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ *y* $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ *entornos abiertos de* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$, *respectivamente, y una única función* $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, $g \in C^1(\mathcal{U})$, *tal que* $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ *y*

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \qquad \textit{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$

Además

$$g'(\mathbf{a}) = -\big(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\big)^{-1} f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Un enunciado tan complicado pide a gritos una explicación sencilla. Lo único que dice el teorema es que si se tienen n ecuaciones y se quieren despejar, de forma diferenciable, n de las variables entonces se puede hacer siempre que las derivadas parciales con respecto a dichas variables conformen un determinante no nulo. En versión minimalista:

$$\det \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Las variables } \mathbf{y} \text{ se pueden despejar.}$$

En el enunciado anterior las n ecuaciones son $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, las n variables que queremos despejar son las coordenadas de $\mathbf{y}$. El teorema concluye que realmente en ciertos abiertos se tiene que $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$. La última fórmula viene, como en el caso del teorema de la función inversa, gratis a partir de la regla de la cadena.

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{O} \Rightarrow\; f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\,\mathrm{I} + f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\,g'(\mathbf{a}) = 0$$

$$\Rightarrow\; g'(\mathbf{a}) = -\big(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\big)^{-1} f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))$$

Por su fácil deducción, no es aconsejable memorizar esta fórmula. En la práctica a menudo es mejor derivar como antes la igualdad $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ suponiendo que $\mathbf{y}$ depende de $\mathbf{x}$ (esto se llama derivar implícitamente), sustituir el punto en el que se quieren calcular las parciales, y despejar “a mano” sin hallar inversas de matrices (véase el ejemplo tras la prueba).

Dem.: Como ya hemos explicado, la clave está en reducir el teorema al de la función inversa creando artificialmente tantas ecuaciones como variables. Con esta idea se define $F : A \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ como $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x},\mathbf{y}))$. Entonces $F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{0})$, $F \in C^1(A)$ y $DF(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es no singular, ya que el jacobiano de F en $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es obviamente

$$\left|\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{m\times m} & \mathrm{O}_{n\times m} \\ \hline f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) & f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \end{array}\right| = 1 \cdot \det f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq 0.$$

Por el teorema de la función inversa existe una inversa local $G \in C^1$ (y podemos suponer $G : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ para cierto entorno $\mathcal{W}$ de $(\mathbf{a},\mathbf{0})$). Como F deja invariantes las primeras variables, G será de la forma $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, h(\mathbf{x},\mathbf{y}))$. De aquí $(\mathbf{x},\mathbf{0}) = (F \circ G)(\mathbf{x},\mathbf{0}) = F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ con $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x},\mathbf{0})$. Nótese que g es única, porque en otro caso F no sería inyectiva en $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ y no existiría inversa local.

■

Los siguientes ejemplos deberían mostrar que todo esto es muy fácil en la práctica, lo que pasa es que para explicar la teoría con rigor hay que envolverlo en una palabrería muy oscura.

No tengo nada que decir contra las palabras, que son como vasos escogidos y preciosos, sino contra el vino del error que en ellos nos dan a beber los maestros a quienes se les ha subido a la cabeza. Confesiones. Libro I, 16.

Ejemplo . Probar que es posible despejar de manera diferenciable u y v en función de x, y, z en las ecuaciones

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ u^3xy + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

en un entorno de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $(u, v) = (1, 1)$. Calcular $\partial u/\partial z$ y $\partial v/\partial z$ en $(1, 1, 1)$.

Nótese que con la notación del teorema $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{y} = (u, v)$ y

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (xy^2 + xzu + yv^2 - 3, u^3xy + 2xv - u^2v^2 - 2).$$

Se cumple $f((1, 1, 1), (1, 1)) = (0, 0)$, en otro caso el problema estaría mal propuesto. Lo único que hay que comprobar es que el determinante jacobiano con respecto a las variables que queremos despejar es no nulo en el punto señalado:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xz & 2yv \\ 3u^2xy - 2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{vmatrix} \underset{\substack{x=y=z=1 \\ u=v=1}}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Una vez que el teorema de la función implícita nos ha asegurado que se puede escribir $u = u(x, y, z)$ y $v = v(x, y, z)$, para calcular las parciales, en vez de aplicar la fórmula del teorema, derivamos *implícitamente* las ecuaciones con respecto a z.

$$\begin{cases} xu + xz\frac{\partial u}{\partial z} + 2yv\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ 3xyu^2\frac{\partial u}{\partial z} + 2x\frac{\partial v}{\partial z} - 2uv^2\frac{\partial u}{\partial z} - 2u^2v\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Al sustituir el punto, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} 1 + \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{p}) + 2\frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{p}) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{p}) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2}$$

donde $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$.

Ejemplo . Probar que existe una función $f : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, con $f(0, 0) = 0$ que verifica

$$e^{f(x,y)} = (1 + xe^{f(x,y)})(1 + ye^{f(x,y)}) \qquad \text{para todo } (x, y) \in \mathcal{U}.$$

Esto no es más que una forma enrevesada de decir que es posible aplicar el teorema de la función implícita a

$$e^z - (1 + xe^z)(1 + ye^z) = 0$$

para obtener z en función de (x, y) en entornos de 0 y $(0, 0)$. El determinante jacobiano es de orden uno, es decir, basta comprobar que $\partial h/\partial z \neq 0$ en el punto correspondiente, donde h es la función definida por el lado izquierdo de la ecuación. Efectuando esta derivada

$$\frac{\partial h}{\partial z} = e^z - xe^z(1 + ye^z) - ye^z(1 + xe^z) = 1 \neq 0 \qquad \text{para } x = y = z = 0.$$

Por tanto el teorema de la función implícita asegura que existe f como la del enunciado.

Nada impide aplicar la derivación implícita para hallar derivadas parciales de orden superior a uno. Se puede probar que $f \in C^n \Rightarrow g \in C^n$ con un argumento como el empleado anteriormente para el teorema de la función inversa.

Ejemplo . Comprobar que la ecuación

$$xy = \log x - \log y$$

admite una única solución $y = y(x)$ en un entorno de $x = \sqrt{e}$ verificando $y(\sqrt{e}) = 1/\sqrt{e}$ y demostrar que alcanza un máximo local en dicho punto.

De nuevo, para aplicar el teorema de la función implícita basta comprobar que la derivada de $-xy + \log x - \log y$ con respecto de y no es nula en $x = \sqrt{e}$, $y = 1/\sqrt{e}$

$$-x - \frac{1}{y} = -\sqrt{e} - \sqrt{e} = -2\sqrt{e} \neq 0.$$

Para probar que alcanza un máximo local basta ver que $y'(\sqrt{e}) = 0$, $y''(\sqrt{e}) < 0$. Derivando implícitamente (obviamente con respecto de x) con $y = y(x)$,

$$y + xy' = \frac{1}{x} - \frac{y'}{y} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{e}} + \sqrt{e}\,y'(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \sqrt{e}\,y'(\sqrt{e}) \;\Rightarrow\; y'(\sqrt{e}) = 0.$$

Y derivando implícitamente una segunda vez la ecuación,

$$y' + y' + xy'' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y''y - (y')^2}{y^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{e}\,y''(\sqrt{e}) = -\frac{1}{e} - \sqrt{e}\,y''(\sqrt{e}) \;\Rightarrow\; y''(\sqrt{e}) < 0.$$

Así pues, se alcanza un máximo local. Sucesivas derivaciones implícitas permitirían obtener el polinomio de Taylor en $x = \sqrt{e}$ de grado arbitrariamente grande y así aproximar numéricamente la solución en un entorno de este punto; aunque desde el punto de vista computacional es más *barato* aplicar de forma inteligente el teorema de la aplicación contractiva. Esta visión constructiva de las funciones implícitas está reflejada en el enunciado del Th. 3.4 en **[Ed]**.

De nuevo le podemos explicar (sin rigor) el significado del teorema de la función implícita a ese amigo nuestro de primero. Le podemos preguntar qué forma tendrán las soluciones de un sistema lineal de ecuaciones de rango n con n ecuaciones y $m+n$ incógnitas. Si ha estudiado, nos responderá que si escogemos n variables cuya matriz de coeficientes tenga determinante no nulo entonces podemos despejarlas en función de las otras que se pueden considerar parámetros. Con ello no costará mucho convencerlo de que lo mismo ocurre con las ecuaciones no lineales que vengan dadas por funciones C^1, ya que estas se aproximan bien por funciones lineales.

Siguiendo con la idea del párrafo anterior, podemos entender los cálculos relacionados con el teorema de la función implícita como el resultado de una aproximación de Taylor de orden uno. Por ejemplo, si consideramos como antes la ecuación

$$e^z - (1 + xe^z)(1 + ye^z) = 0$$

y aproximamos e^z por Taylor hasta grado uno, se obtiene

$$1 + z - (1 + x + xz)(1 + y + yz) \approx 0.$$

Y eliminando todos los términos de grado mayor que uno

$$z - x - y \approx 0.$$

Si confiamos en que la aproximación de Taylor sea suficientemente buena, deducimos que z se puede despejar en un entorno del origen y de hecho $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 1$. El teorema de la función implícita garantiza que bajo ciertas hipótesis nuestra confianza en Taylor es correcta.

Para terminar enunciaremos los teoremas del rango que son prácticamente una variante del teorema de la función inversa. Seguramente ni siquiera recibirían un nombre especial de no ser porque aparecen en el estudio de la geometría de subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

Hay dos resultados, en cierto modo simétricos, que se recogen bajo la denominación de teorema del rango; el primero considera una función que envía $m+n$ variables a $\mathbb{R}^n$, y el segundo una que envía n variables en $\mathbb{R}^{m+n}$; en ambos casos se concluye que con una transformación adecuada en $\mathbb{R}^{m+n}$ se puede conseguir que estas funciones sean de alguna forma la “identidad” en n variables. Concretamente, en el primer caso la proyección $\mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y en el segundo caso la inclusión $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$.

Teorema 2.5 (del rango, -caso sobreyectivo-**):** *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *con* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$*; y sea* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A$. *Si* $Df(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *tiene rango* n *entonces existe una función* $G : \mathcal{W} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{W}$, $G \in C^1$ *con inversa local diferenciable tal que*

$$(f \circ G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \qquad \textit{para todo } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{W}.$$

Observación: La condición sobre el rango de la diferencial equivale a que sea una aplicación lineal sobreyectiva. A veces se dice que f es una submersión.

DEM.: Quizá permutando las variables de f (lo cual es una transformación lineal invertible) podemos suponer que el menor de orden n no nulo de $f'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es el formado por las últimas n columnas, esto es, $\det f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces exactamente igual a como habíamos visto en la demostración del teorema de la función implícita, el teorema de la función inversa implica que $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ tiene una inversa local, G, y por tanto $F \circ G = \mathrm{I}$, en particular, $(f \circ G)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$. ∎

Teorema 2.6 (del rango, -caso inyectivo-**):** *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, *y sea* $a \in A$. *Si* $Df(\mathbf{a})$ *tiene rango* n *entonces existe una función* $G : \mathcal{W} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{a}) \in \mathcal{W}$, $G \in C^1$ *con inversa local diferenciable tal que*

$$(G \circ f)(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

para todo $\mathbf{x}$ *en un entorno de* $\mathbf{a}$.

Observación: La condición sobre el rango de la diferencial equivale en este caso a que sea inyectiva. A veces se dice que f es una inmersión.

DEM.: De nuevo aquí tras una permutación adecuada podemos suponer que el menor no nulo de la matriz jacobiana de $f'(\mathbf{a})$ es el formado por las primeras n filas, digamos $\det M_n$. Considerando la función $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{0}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, su jacobiano en $(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ es

$$\left| \begin{array}{c|c} M_n & \mathrm{O}_{n\times m} \\ \hline * & \mathrm{I}_{m\times m} \end{array} \right| = \det M_n \neq 0.$$

Por el teorema de la función inversa existe una inversa local, G, en particular $(G \circ F)(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$, y esto equivale a $(G \circ f)(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$. ∎

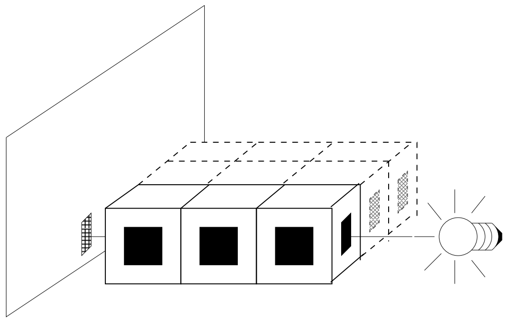
Tomografías de juguete

Material:

- Cartulina.
- Plástico semitransparente.
- Una linterna.

Objetivos: Explicar los rudimentos de uno de los métodos con los que se hacen tomografías y su relación con los algoritmos iterativos para resolver sistemas lineales y el teorema de la aplicación contractiva.

El experimento: Con la cartulina fabricaremos nueve cubos y en sus caras laterales abriremos "ventanas" para que pueda pasar la luz, las cuales cubriremos en algunos de ellos con el plástico semitransparente*. Al poner tres cubos seguidos y enfocarlos con la luz de la linterna, se pueden detectar en una pantalla (una hoja de papel) cuatro posibles intensidades dependiendo de si ninguno, uno, dos o los tres cubos tienen plástico en sus ventanas.

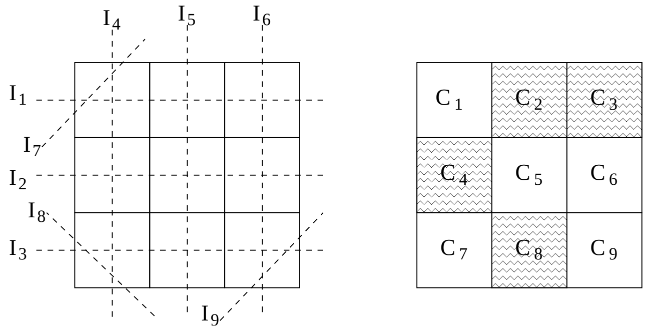


Convencionalmente designaremos estas intensidades por $I = 1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4$ respectivamente. Es importante familiarizarse con ellas de manera que podamos distinguirlas a simple vista. En otro caso, debemos cambiar el tipo de plástico.

Dispongamos los cubos formando un cuadrado (si queremos darle emoción podemos pedirle a alguien que lo haga por nosotros y que tape el resultado con un folio por encima). Dirigiendo la linterna en las tres direcciones horizontales, en las tres verticales y en las

* *N. del A.* Construí los cubos de $4\,cm$ de arista y las ventanas de 2×2. Como plástico semitransparente utilicé el de una bolsa blanca de las que dan en los supermercados. Tiene el inconveniente de que difunde la luz porque no queda totalmente lisa, pero en cuanto a transparencia es muy aceptable. Quizá el papel de celofán de colores también sea adecuado.

oblicuas correspondientes a tres de las cuatro esquinas, tendremos una relación entre el número de cubos semitransparentes en las secciones consideradas y las intensidades registradas.



Supongamos que numeramos los cubos como en la figura y asignamos al cubo $i-$ésimo el valor $C_i = 0$ si está hueco y $C_i = 1$ si es semitransparente. Entonces se tienen las relaciones

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 + C_3 &= I_1^{-1} - 1 & \qquad C_1 + C_4 + C_7 &= I_4^{-1} - 1 \\
C_4 + C_5 + C_6 &= I_2^{-1} - 1 & \qquad C_2 + C_5 + C_8 &= I_5^{-1} - 1 \\
C_7 + C_8 + C_9 &= I_3^{-1} - 1 & \qquad C_3 + C_6 + C_9 &= I_6^{-1} - 1
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$C_1 = I_7^{-1} - 1, \qquad C_7 = I_8^{-1} - 1, \qquad C_9 = I_9^{-1} - 1$$

En el caso de la figura, habríamos obtenido el vector de intensidades

$$\vec{I} = (I_1, \ldots, I_9) = \big(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\big).$$

Lo que da lugar a un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Se puede comprobar que, si no usamos que $C_i \in \{0, 1\}$, dicho sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones. Añadiendo una nueva relación: la intensidad $I_{10} = 1/2$ que pasa por la esquina C_3, obtenemos finalmente un sistema determinado que nos lleva a

$$\vec{C} = (C_1, \ldots, C_9) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0).$$

En resumen: lo que hemos logrado hacer es obtener la composición y estructura de la matriz de cubos sin necesidad de desmantelarla, usando simplemente la información obtenida por los rayos de luz que lo atraviesan. Es decir, hemos logrado hacer una tomografía (aunque sea de juguete).

De lo lúdico a lo práctico: El experimento recién descrito representa la idea que permite hacer una TAC (tomografía axial computerizada), una vez sustituida la luz visible por rayos X para los que el cuerpo humano es semitransparente, pero hay un abismo de dificultades hasta poder llevar esta idea a la práctica. Aquí nos centraremos en las relacionadas con los métodos matemáticos que queremos ilustrar. (En realidad en la práctica médica actual se emplean usualmente algoritmos computacionalmente menos costosos que el aquí descrito pero que utilizan herramientas matemáticas que se salen del contenido de este curso).

Supongamos por ejemplo que deseamos tener una resolución comparable a la de un monitor y para ello imaginamos una malla de 1000×1000 *pixels* que contiene la sección del cuerpo humano que vamos a examinar. Esto lleva a considerar 10^6 variables que representan la densidad (opacidad a los rayos X) en cada *pixel*. El sistema lineal correspondiente tendrá una matriz de $10^6 \times 10^6 = 10^{12}$ elementos lo cual podría causar algunos problemas de memoria en ordenadores convencionales si los tenemos que almacenar todos (necesitaríamos algo comparable a un *Terabyte* de memoria libre).

Las estimaciones generales del número de operaciones para resolver un sistema lineal por eliminación de Gauss es del orden del cubo del número de variables, en nuestro caso 10^{18}. A una velocidad de $1\,GHz$ esto llevaría del orden de 30 años (lo que no ayudaría mucho a reducir las listas de espera de la Seguridad Social).

Otro problema más complejo es que si hacemos 10^6 mediciones para determinar las 10^6 variables puede ocurrir, como en nuestro experimento, que el sistema sea indeterminado o esté muy cercano a serlo, lo cual desde el punto de vista computacional es prácticamente lo mismo y causa que la solución numérica pueda diferir ampliamente de la real.

Soluciones matemáticas: La matriz del sistema (2.3) correspondiente a nuestro experimento contiene en cada fila a lo más tres unos porque cada rayo atravesaba a lo más tres cubos. En el caso de una malla 1000×1000, cada rayo atravesará a lo más del orden de 1000 *pixels*, por lo cual cada fila de la matriz queda determinada especificando la posición de aproximadamente 1000 unos (aquí descartamos problemas adicionales debidos a que un *pixel* cuadrado atenúa más la intensidad cuando se atraviesa por la diagonal que por la arista, que es más corta, así que los unos no son exactamente unos). Además hay cierta regularidad en su estructura heredada de la sencilla geometría de la malla. En definitiva, la matriz se puede comprimir enormemente porque es muy *dispersa* y por tanto su almacenamiento no es tan crítico. Lo que vamos a ver es un algoritmo para resolver sistemas lineales con este tipo de matrices debido a S. Kaczmarz.

Podemos escribir un sistema de N ecuaciones con N incógnitas como

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{x} = c_1, \qquad \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{x} = c_2, \qquad \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{x} = c_3, \qquad \dots\ \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{x} = c_N \tag{2.4}$$

donde $\mathbf{f}_i$ es la fila $i-$ésima de la matriz de coeficientes. Cada ecuación $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x} = c_i$ representa geométricamente un hiperplano. No es difícil probar (repasar el curso de Álgebra Lineal) que la función afín que asigna a cada punto su proyección ortogonal sobre este hiperplano es

$$L_i(\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x}) + c_i \frac{\mathbf{f}_i}{\|\mathbf{f}_i\|^2} \qquad \text{con} \qquad P_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{x}) \frac{\mathbf{f}_i}{\|\mathbf{f}_i\|^2},$$

y el cálculo de $L_i(\mathbf{x})$ requiere pocas operaciones porque $\mathbf{f}_i$ contiene muchos ceros.

Nótese que $P_i(\mathbf{x})$ es la proyección cuando el hiperplano correspondiente se traslada al origen. Para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ se tiene $\|P_1(\mathbf{v})\| < \|\mathbf{v}\|$ excepto si $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$, en cuyo caso $P_1(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. De la misma forma, $\|(P_2 \circ P_1)(\mathbf{v})\| < \|\mathbf{v}\|$ excepto si $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$. Si los $\mathbf{f}_i$ son linealmente independientes entonces la única solución de $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} = \ldots = \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{v} = 0$ es la trivial, con lo cual, repitiendo el argumento anterior, se concluye que $|||P_N \circ P_{N-1} \circ \ldots \circ P_1||| = C < 1$.

Consideremos el operador $Q = L_N \circ L_{N-1} \circ \ldots \circ L_1$, entonces $Q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una función contractiva ya que

$\|Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\| = \|(L_N \circ L_{N-1} \circ \ldots \circ L_1)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \|(P_N \circ P_{N-1} \circ \ldots \circ P_1)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.
El teorema de la aplicación contractiva asegura que tiene un sólo punto fijo que puede obtenerse con el algoritmo iterativo

$$\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = (L_N \circ L_{N-1} \circ \ldots \circ L_1)(\mathbf{x}_n)} \quad \text{para cualquier } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Este punto fijo es la solución de (2.4) ya que al estar dicha solución en todos los hiperplanos es invariante bajo las proyecciones sobre ellos.

Una ventaja del método es que se puede aplicar incluso en el caso en el que haya más ecuaciones que incógnitas simplemente aumentando el valor de N en (2.4). Así pues, haciendo más mediciones de las que necesitamos podemos estar bastante seguros de que el sistema no es indeterminado, aunque corremos el riesgo de que por errores experimentales o en el modelo, el sistema sea incompatible. Incluso en este caso, si los errores no son muy graves, la sucesión $\mathbf{x}_n$ oscilará alrededor de la solución real.

En el caso de nuestro experimento, con el sistema (2.3) ampliado con la ecuación para C_3, las iteraciones obtenidas partiendo de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ verifican

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_5 &= (0, 0'8595, 1, 0'7278, 0'3468, -0'0746, 0, 0'7937, 0)\\
\mathbf{x}_{10} &= (0, 0'9081, 1, 0'8908, 0'1925, -0'0832, 0, 0'8994, 0)\\
\mathbf{x}_{15} &= (0, 0'9472, 1, 0'9449, 0'1068, -0'0517, 0, 0'9460, 0)\\
\mathbf{x}_{20} &= (0, 0'9704, 1, 0'9701, 0'0593, -0'0294, 0, 0'9703, 0)\\
\mathbf{x}_{25} &= (0, 0'9836, 1, 0'9835, 0'0329, -0'0164, 0, 0'9835, 0)
\end{aligned}$$

Nótese que con unas pocas iteraciones la aproximación a la solución $\mathbf{x} = (C_1, C_2, \ldots, C_9)$ es tan buena que es posible adivinar enseguida dónde están los cubos semitransparentes ($C_i = 1$) y los huecos ($C_i = 0$).

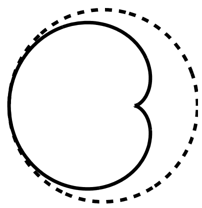
Catacaústicas, corazones y riñones

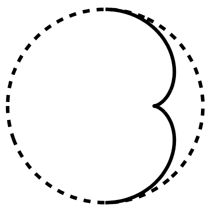
Material:

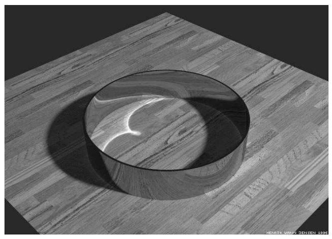
- Una taza de café con leche.
- Un anillo tipo alianza (sin adornos).
- Una caja de galletas metálica redonda.
- Un foco halógeno (por ejemplo de una cocina o baño, no hace falta descolgarlo).
- Una linterna.
- Una regla.

Objetivos: Explicar las curvas que se forman por reflexión en una circunferencia, estudiando su diferenciabilidad con el teorema de la función implícita.

El experimento: Tomemos la linterna, preferiblemente sin su carcasa para que la luz de la bombilla se dirija en todas las direcciones, y pongámosla en el borde del anillo, de la taza vacía, de la tazá de café con leche o de la caja de galletas. En una habitación oscura y quizá ajustando un poco la posición de la linterna podemos observar con más o menos precisión[*] en todos los casos un reflejo en el fondo como se indica en la primera figura.







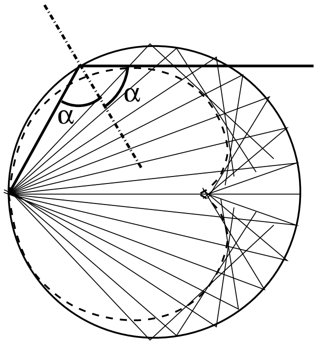
Si utilizamos la luz de un foco halógeno situado lejos (en el techo) de manera que la luz entre oblicuamente, veremos una porción de curva (el resto está tapada por una sombra) como la de la segunda figura o la de la foto que la sigue.

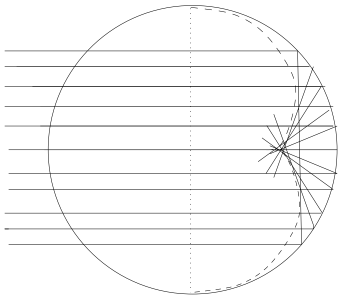
Aparentemente hay un punto *cuspidal* (como al dibujar $t \mapsto \pm\sqrt{t^3}$, sorprendentemente observamos la no diferenciabilidad en un fenómeno físico). Con la ayuda de una regla se

[*] *N. del A.* El fenómeno es bastante fácil de observar pero el material empleado influye en gran medida en el resultado y no hay más remedio que probar hasta conseguir los mejores efectos. En mi caso éstos se lograron con una taza de plástico cilíndrica vacía. La caja de galletas, a pesar de que era esperanzadora por ser muy reflectante, no dio tan buen resultado (es conveniente tapar el fondo con un papel a modo de pantalla). En una taza de café las figuras son visibles pero se vuelven más nítidas cuando se aclara con leche. La foto mostrando la curva tan perfecta está tomada de la página de un investigador llamado H. Wann Jensen, quien la consiguió con un cilindro metálico.

puede comprobar que cuando empleamos la linterna, dicho punto parece dividir al diámetro en dos trozos de manera que el más alejado es la mitad que el otro; mientras que usando el foco halógeno, es la tercera parte.

La geometría de la reflexión: Despreciando la altura de los diversos cilindros que usamos (en realidad ésta, y la inclinación de los rayos en el segundo caso, tienen alguna influencia), podemos considerar que el fenómeno se reduce a estudiar la reflexión en una circunferencia. La única ley que hay que respetar es que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales. Con ella en mente, si en un dibujo trazamos los reflejados de unas cuantas rectas que parten de un punto de la circunferencia (primer caso) o del "infinito" (esto es, paralelas: segundo caso), observamos que son tangentes a curvas como las observadas en el experimento.





Por consiguiente en estas curvas se concentran los rayos reflejados y por ello las vemos en el experimento. En general, las curvas obtenidas por reflexión en curvas o superficies se llaman *catacaústicas*. En nuestro caso, la primera catacaústica de la circunferencia se llama *cardioide* (del griego $\kappa\alpha\rho\delta\iota\alpha =$ corazón) y la segunda, una vez completada simétricamente por el diámetro vertical, se llama *nefroide* (de $\nu\epsilon\phi\rho o\varsigma =$ riñón).

Envolventes y funciones implícitas: El próximo capítulo estudiaremos más en profundidad las curvas, pero aquí usaremos algunos hechos que pertenecen a nuestra experiencia matemática de cursos anteriores. Uno de ellos es que una curva en $\mathbb{R}^2$ se expresa como una fórmula del tipo $F(x, y) = 0$ y por tanto $F(x, y, t) = 0$ se puede considerar como una familia de curvas: una para cada valor de t. Sabíamos también que el gradiente es normal a las curvas de nivel, es decir, para cada $t = t_0$ fijado, $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y)$ es perpendicular a la curva $F(x, y, t_0) = 0$.

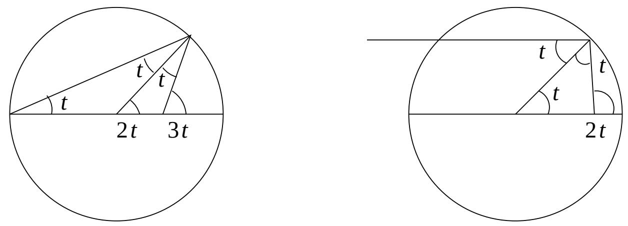
Lo que nosostros buscamos es una curva C que sea tangente a todas las curvas (en nuestro caso rectas) de una familia. Se dice que tal curva es la *envolvente* de la familia. Asignemos a cada valor de t el punto de tangencia con la envolvente, $(x(t), y(t)) \in C$, y supongamos que en un entorno esta función está bien definida y es diferenciable (no siempre sucede así). Entonces se tiene $F(x(t), y(t), t) = 0$, y derivando implícitamente

$$\frac{\partial F}{\partial x}x' + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Como para cada t fijado $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y)$ es un vector normal y (x', y') es un vector tangente (la velocidad), se sigue $\partial F/\partial t = 0$. En definitiva, los puntos (x, y) de la envolvente deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones

$$F(x, y, t) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0.$$

En nuestro caso, simple geometría elemental (véase la figura) muestra que si un rayo parte de $(-1, 0)$ en la circunferencia unidad, el rayo reflejado en $(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$ tiene vector director $(\cos(3t), \operatorname{sen}(3t))$; mientras que si viene horizontalmente, el rayo reflejado en $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ tiene a $(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$ como vector director.



Calculando la ecuación de las rectas se obtiene que la familia a considerar en el primer caso es $x \operatorname{sen}(3t) - y \cos(3t) - \operatorname{sen} t = 0$ y por tanto la ecuación de la envolvente es

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}(3t) - y \cos(3t) - \operatorname{sen} t = 0 \\ 3x \cos(3t) + 3y \operatorname{sen}(3t) - \cos t = 0 \end{cases}$$

De aquí se puede obtener una fórmula parametrizada para la cardioide (que permite dibujarla con precisión):

$$x = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{3}\cos t \cos(3t), \qquad y = -\operatorname{sen} t \cos(3t) + \frac{1}{3}\cos t \operatorname{sen}(3t).$$

Aplicando el teorema de la función implícita se tiene que los únicos posibles puntos donde no se puede despejar (de forma diferenciable) x en función de y ó y en función de x son los correspondientes a $\operatorname{sen} t \cos(3t) = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(3t) = 0$. Es decir $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, lo que da lugar a un único punto $(1/3, 0)$ que, como sugería el experimento, divide al diámetro de la circunferencia unidad en dos trozos, uno el doble que el otro. Aproximando por Taylor alrededor de $t = 0$ es fácil comprobar que en un entorno de este punto se tiene $y \approx \pm 27\sqrt{3}\,(x - 1/3)^{3/2}/16$.

Razonamientos similares se pueden aplicar en el caso de la nefroide.

3. Subvariedades diferenciables de $\mathbb{R}^m$

En cursos anteriores han aparecido curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y superficies en $\mathbb{R}^3$, de las cuales hemos hallado tangentes y sus representaciones gráficas. Dentro de un cuatrimestre, en Geometría II, se verá que estos objetos simples dan bastante más de sí desde el punto de vista matemático de lo que pudiera parecer en principio. Ahora llega el momento de despegar del suelo y asomarmos al mundo de dimensiones mayores estudiando en este capítulo los objetos geométricos multidimensionales lisos (sin picos ni aristas) que hay en $\mathbb{R}^m$, llamados subvariedades. Con ello habremos subido un primer peldaño de la escalera hacia la geometría superior. En ella (en particular en Geometría n, $n > 2$) uno de los conceptos fundamentales es el de variedad, que es como una subvariedad mirada desde dentro, sin hacer referencia a un espacio ambiente $\mathbb{R}^m$ en el que esté inmersa.

Quizá todo esto pueda parecer alimento del matemático puro que está en las nubes $n-$dimensionales pero, bien al contrario, la geometría es una parte de las Matemáticas muy unida histórica y conceptualmente a la Física. Por ejemplo, las ligaduras de un sistema mecánico se reflejan en una subvariedad cuya dimensión es el número de grados de libertad. Otro ejemplo muy conocido y manoseado es la relatividad general que postula que el universo es una variedad de dimensión cuatro (no se habla de subvariedad porque se entiende que fuera del universo no hay nada) y con el lenguaje geométrico muchas cuestiones ridículas como "¿qué ocurrió antes del principio del universo?", que saltan arropadas de un halo mistérico científico a los suplementos de los periódicos, cobran sentido.

Responderé ahora a los que preguntan:"¿qué hacía Dios antes de crear el cielo y la tierra?". Y no respondo diciendo que "preparando el infierno para los que escudriñan estos altos misterios". Esta frívola contestación la preparó –según he oído decir– un individuo que con bromas quería eludir la fuerza del problema. Pero una cosa es hacer bromas y otra encontrar una respuesta. Confesiones. Libro XI, 12.

Según un reputado cosmólogo la variedad del universo es compacta y el tiempo es una función continua definida en ella, así que el tiempo está acotado: en algún momento se acaba.

Y si antes del cielo y de la tierra no había tiempo, ¿a qué viene preguntar qué hacías entonces? Pues no había entonces*, donde no existía el tiempo.* Confesiones. Libro XI, 13.

Según sus propias palabras "preguntar qué ocurrió antes del principio del universo es como preguntar acerca de un punto de la tierra a 91° latitud norte, simplemente no está definido". Afortunadamente fuera de las Matemáticas no impera la dictadura de las demostraciones, lo que desafortunadamente alimenta la tiranía de la autoridad.

3.1. Definición y equivalencias

Como hemos mencionado, lo que buscamos es estudiar objetos multidimensionales lisos en $\mathbb{R}^m$. Para ello examinemos en primer lugar algunos de los que tenemos al alcance de nuestra mano o nuestro papel, en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$, para tratar de abstraer sus propiedades y dar una definición sensata que se pueda generalizar a dimensiones superiores.

Por ejemplo, pensemos cómo caracterizar la superficie esférica unidad $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y por qué decimos que tiene dimensión dos. Respecto a la primera cuestión casi todos responderíamos que los puntos de S^2 quedan caracterizados con la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$; por extenso

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Si ahora nos preguntasen por qué es bidimensional, después de pensarlo un poco, podríamos decir que por ejemplo la parte de arriba, $S^2 \cap \{z>0\}$, es la gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, de modo que

$$G : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2<1\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad G(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

expresa $S^2 \cap \{z>0\}$ en función de dos parámetros. Podríamos hacer lo mismo en el resto de la esfera. Como tenemos dos grados de libertad (dos variables independientes) la dimensión es dos.

Geométricamente lo que hace G es curvar un trozo de $\mathbb{R}^2$, el disco abierto unidad, en un trozo de S^2. Podríamos pensar en una suerte de proceso inverso por medio de una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que aplaste un trozo de S^2 en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. En nuestro caso podría ser

$$F : \{z>0\} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y,z) = (x,y,x^2+y^2+z^2-1)$$

que aplasta $S^2 \cap \{z>0\}$ en el disco abierto unidad de $\mathbb{R}^2$ y lo incluye en $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. De hecho se cumple que $(F \circ G)(x,y) = (x,y,0)$.

Tras este ejemplo podemos pensar que una superficie (algo bidimensional) en $\mathbb{R}^3$ corresponde a cualquiera de las siguientes ideas:

• Una relación entre las variables x, y, z.

• Funciones que pasan trozos abiertos de $\mathbb{R}^2$ a la superficie cubriéndola por completo.

• Funciones que pasan trozos de la superficie que la cubren por completo en abiertos de $\mathbb{R}^2$ incluidos en $\mathbb{R}^3$.

Escojamos ahora una curva en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo una recta. Entonces el esquema análogo funciona porque una recta se puede escribir como una función que involucra x e y, su ecuación cartesiana, podemos expresar los puntos de la recta en función de un parámetro real, como muestra la ecuación paramétrica, y también existe una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva la recta al eje X, $\mathbb{R} \times \{0\}$, (basta tomar un giro).

Si consideramos, como último ejemplo, una recta en $\mathbb{R}^3$, se puede repetir de nuevo todo el esquema. Nótese, sin embargo, que ahora se necesitan dos ecuaciones en x, y, z

para caracterizar la recta (por ejemplo escribiéndola como intersección de dos planos). Si recordamos el teorema de la función implícita, es lógico que esto sea algo general: con una ecuación en x, y, z, bajo ciertas condiciones podemos despejar una variable en función de otras dos que quedan libres, mientras que con dos ecuaciones podremos despejar dos variables dejando una libre.

La última observación nos da la clave para definir subvariedad: si escribimos k ecuaciones en $m = n + k$ variables entonces bajo las condiciones del teorema de la función implícita tendremos algo $n = (n+k) - k$ dimensional. Nótese que no sabemos si son exactamente las k últimas variables las que se pueden despejar, así que en vez de pedir que el determinante de las k últimas columnas de la matriz jacobiana sea no nulo, pediremos que exista algún menor de orden k no nulo; esto es, que el rango sea k. Una complicación técnica es que si somos poco hábiles quizá necesitemos diferentes ecuaciones en diferentes abiertos para caracterizar nuestro conjunto $n-$dimensional, por ejemplo $\sqrt{1 - x^2 - y^2} - z = 0$ es la ecuación de S^2 sólo en $z > 0$, por lo que la definición debe ser de naturaleza local.

DEFINICIÓN: *Un conjunto no vacío $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ es una subvariedad $n-$dimensional diferenciable de $\mathbb{R}^{n+k}$ si todo $\mathbf{a} \in M$ tiene un entorno $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ de forma que*

$$\mathcal{U} \cap M = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \ : \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

donde $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es C^1 y $Df(\mathbf{x})$ tiene rango k para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap M$.

A los números n y k se les llama dimensión y codimensión, escribiéndose $\dim M = n$ y $\operatorname{codim} M = k$ respectivamente. El calificativo "diferenciable" en la definición de subvariedad se suele omitir y a veces se reemplaza por "de clase C^k" si $f \in C^k$. En muchos textos (de hecho en casi todos los de la bibliografía) se utiliza el término *variedad* en vez de *subvariedad*. A este nivel no puede haber mucha confusión porque una subvariedad no es más que una variedad metida en $\mathbb{R}^m$, el espacio protagonista del curso, sin embargo la distinción es importante en cursos avanzados de geometría porque se pretende estudiar las variedades intrínsecamente, sin referencia a los espacios donde se puedan meter.

Un último apunte con respecto a la notación antes de pasar a los ejemplos, es que las subvariedades M con $\dim M = 1$ y $\dim M = 2$ se suelen llamar curvas regulares y superficies regulares, respectivamente, sobre todo si están en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. También a veces se llaman hipersuperficies (o hipersuperficies regulares) a las subvariedades de dimensión $m - 1$ que están en $\mathbb{R}^m$, especialmente para $m > 3$.

Ejemplo . Un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ es una subvariedad $0-$dimensional, para verlo basta tomar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ cuya diferencial claramente tiene rango m y por tanto la dimensión es cero ($m = n+k,\ m = k \ \Rightarrow \ n = 0$). Aunque el ejemplo sea trivial, como notaremos dentro de dos secciones, en algunos problemas de máximos y mínimos condicionados desconsiderar estas subvariedades puede llevar a resultados erróneos.

> *Yo, pues torpe y embotado de corazón como era que ni siquiera me entendía a mí mismo, pensaba que todo aquello que no tiene dimensiones en el espacio, no es absolutamente nada. Si no tenía ni podía tener las cualidades propias del espacio como extenderse, difundirse, juntarse o hincharse, no es absolutamente nada.* Confesiones. Libro VII, 1.

En el otro extremo, cualquier abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es una subvariedad $m-$dimensional de $\mathbb{R}^m$ tomando f idénticamente nula, y no es difícil comprobar que, de hecho, todas las de dimensión m son de esta forma.

Ejemplo . Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(x, y, z) = 0\}$ con $f : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\nabla f \neq \mathbf{0}$ en M, entonces f es una superficie regular.

Esto se sigue directamente de la definición porque $\nabla f \neq \mathbf{0}$ es lo mismo que decir que la matriz jacobiana (que es la matriz fila $\big(\nabla f\big)^t$) tiene un elemento no nulo o, lo que es lo mismo, rango uno y $k = 1$, $n + k = 3 \Rightarrow n = 2$. Un caso particular de este ejemplo es $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Nótese que $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ sólo se anula en el origen, que no pertenece a S^2.

De la misma forma, la *superfecie esférica unidad* en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

es una subvariedad $n-$dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo . Comprobar que $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + 2y = 0,\ x + y + z = 1\}$ es una curva regular.

Antes de nada, es fácil interpretar M geométricamente porque $x^2 + y^2 + 2y = 0$, que equivale a $x^2 + (y + 1)^2 = 1$, representa un cilindro vertical y $x + y + z = 1$ es un plano oblicuo así que M debe ser una elipse en el espacio (en particular un conjunto no vacío). Calculando la matriz jacobiana

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 2y, x + y + z - 1) \ \Rightarrow\ f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y + 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos ver que el rango es dos ($k = 2$, $n + k = 3 \Rightarrow n = 1$). Si no es dos entonces debería ser uno, en particular, los menores formados por la primera y la tercera columnas y la segunda y la tercera columnas serían nulos obteniéndose $x = 0$, $y = -1$ (este resultado se sigue también fácilmente notando que las dos filas son linealmente dependientes si y sólo si la primera es nula), y sustituyendo en la primera ecuación se llega a una contradicción.

Es importante notar que un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ puede ser una subvariedad aunque quizá venga dado mediante una función que no tenga las propiedades requeridas en la definición. Esto no excluye que exista otra función que sí las tenga. Por ejemplo

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2=0\} \qquad \text{y} \qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \, : \, x=0, \ y=0\}$$

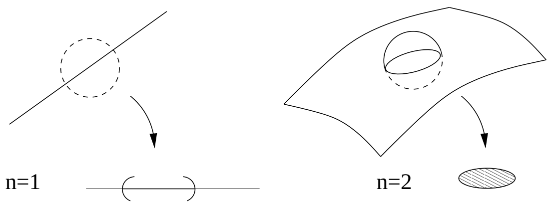
representan la misma subvariedad $0-$dimensional, el origen, sin embargo $f_1(x,y)=x^2+y^2$ no cumple $\operatorname{rg} f_1'(0,0)=2$ y $f_2(x,y)=(x,y)$ sí lo cumple. Esta situación obliga a ser muy cautos a la hora de concluir que un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ no es una subvariedad porque no podemos comprobar todas las funciones una a una. Prácticamente en todos estos casos lo que haremos será suponer que existe una función "buena" y llegaremos a un resultado falso, es decir, procederemos por reducción al absurdo.

Y la falsedad no es otra cosa que suponer la existencia de algo que en realidad no existe. Confesiones. Libro VII, 15.

Ejemplo . Probar que $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \, : \, x^2-y^2=0, \ y\geq 0\}$ no es una subvariedad.

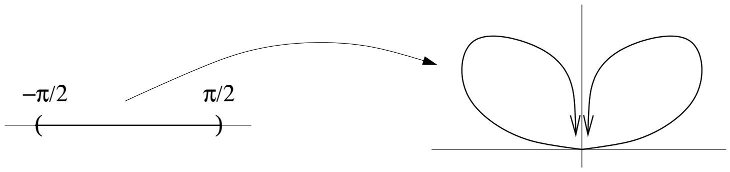
Geométricamente está claro porque M tiene un "pico" en el origen. Supongamos que existiera una $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ con $\mathcal{U}$ un entorno del origen tal que $\mathcal{U}\cap M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \, : \, f(x,y)=0\}$ y $\nabla f\neq\mathbf{0}$. Si $D_1f(0,0)\neq 0$ entonces por el teorema de la función implícita se podría despejar x en función de y en cierto entorno del origen, pero esto es imposible porque en cualquier $B_\epsilon(\mathbf{0})$ a cada y le corresponden dos valores de x (los puntos (x,x) y $(-x,x)$ pertenecen a M). Por otra parte $D_2f(0,0)\neq 0$ implicaría que y es una función C^1 de x, sin embargo la relación $x^2-y^2=0$, $y\geq 0$ implica $y=|x|$ que no es siquiera diferenciable en $x=0$.

Una vez que hemos definido una subvariedad $n-$dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$ como un subconjunto definido mediante una relación entre las variables de $\mathbb{R}^{n+k}$, nos queda ver la equivalencia con las otras interpetaciones que habíamos analizado para algunas curvas y superficies. Es decir, queremos ver que una subvariedad se puede definir mediante funciones que curvan trozos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n+k}$ o mediante funciones que aplastan la subvariedad en trozos de $\mathbb{R}^n$.



Las funciones que curvan trozos de $\mathbb{R}^n$ en la subvariedad se llaman parametrizaciones locales. Hay dos requisitos técnicos que debemos imponer sobre ellas. El primero es que realmente dependan de las n variables, para lo cual exigiremos que el rango de su diferencial sea n, el otro es mucho más difícil de explicar sin adentrarse en los inhóspitos dominios de la asignatura de Topología: pediremos que sea un homeomorfismo sobre su imagen.

Esto significa esencialmente que la imagen represente fielmente el conjunto del que hemos partido, es decir, que no haya puntos bien separados que se aproximen indefinidamente en la imagen. Sorprendente esto no es lo mismo que pedir continuidad e inyectividad (por ejemplo: $t \mapsto (\operatorname{sen}(2t)\cos t, \operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen} t)$ es continua e inyectiva si $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ pero 0 tiene una imagen que se acerca infinitamente a las de $-\pi/2+\epsilon$ y $\pi/2-\epsilon$ cuando $\epsilon \to 0$).



El ejemplo paradigmático del extraño fenómeno anterior, es la función $f : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Tiene la desventaja de no estar definida sobre un abierto, pero permite visualizar fácilmente que cualquier abierto conteniendo a $f(0) = (0,0)$ contendrá también a infinitos puntos de la forma $f(2\pi-\epsilon)$. Esto equivale a decir que su inversa no es continua.

DEFINICIÓN: *Se dice que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un* <u>*homeomorfismo sobre su imagen*</u> *si la restricción de f a $f : A \longrightarrow f(A)$ es continua y tiene una inversa continua.*

Veamos también la versión diferenciable de esto en abiertos, que aparecerá después.

DEFINICIÓN: *Se dice que $f : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un* <u>*difeomorfismo sobre su imagen*</u> *si es C^1 y tiene una inversa C^1 cuando se restringe a $f : \mathcal{U} \longrightarrow f(\mathcal{U})$.*

Observación: El teorema de la función inversa nos dice que lo de los difeomorfismos sobre su imagen en pequeños entornos es una cosa sencilla, simplemente son funciones cuyo jacobiano no se anula. El propio teorema se puede escribir con esta notación de una forma muy sintética: "Una función C^1 es un difeomorfismo sobre su imagen en un entorno de $\mathbf{a}$ si y sólo si $Df(\mathbf{a})$ es un isomorfismo".

Finalmente vamos a la definición que buscábamos.

DEFINICIÓN: *Se dice que $X : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \in C^1$, es una* <u>*parametrización local*</u> *si es un homeomorfismo sobre su imagen y $DX(\mathbf{a})$ tiene rango n en todo punto de $\mathcal{V}$.*

Tras estas definiciones ya estamos preparados para enunciar el "superteorema" que nos diga que las tres formas antes citadas de mirar las subvariedades son equivalentes. Como refrigerio para el lector, es justo decir que aunque la idea geométrica previa sea muy fácil de entender, cuando uno quiere explicarla rigurosamente se enfrenta con multitud de detalles técnicos, por lo que la comprensión de los recovecos de la prueba no es seguramente asequible a la mayoría de los estudiantes aunque pueda seguirse paso a paso.

> *Hasta que tuve que explicar todas estas artes no comprendí que fueran tan difíciles de entender incluso de los estudiosos y los hombres de talento. Entonces descubrí que el más inteligente de entre ellos seguía mis explicaciones sin dificultad.* Confesiones. Libro IV, 16.

Teorema 3.1 : *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) M es una subvariedad $n-$dimensional diferenciable de $\mathbb{R}^{n+k}$

b) Para cada $\mathbf{a} \in M$ existe una parametrización local $X : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ con $\mathbf{a} \in X(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \cap M$ para cierto abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

c) Para cada $\mathbf{a} \in M$ existe un entorno suyo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ y un difeomorfismo sobre su imagen $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ tal que

$$F(\mathcal{U} \cap M) = F(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}) \qquad \text{con } \mathbf{0} = (0, \overset{k \text{ veces}}{\ldots\ldots}, 0).$$

Observación: Quizá los que no hayan perdido ya toda esperanza de entender todo este barullo técnico, hayan notado la falta de simetría de *b*) y *c*). Si queremos hablar en *b*) de funciones que curvan trozos de $\mathbb{R}^n$ en M y en *c*) de funciones que aplastan trozos de M en $\mathbb{R}^n$, ¿por qué no consideramos simplemente las inversas de las parametrizaciones restringidas a M? (en cursos superiores de geometría éstas son las funciones importantes y se llaman cartas). La razón es que no es fácil decir qué significa que una función $M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sea C^1 si M no es un abierto. La noción de diferenciabilidad en variedades es más sutil de lo que parece.

DEM.:

a) ⇒ *b*) Para cada $\mathbf{a} \in M$ tenemos $\mathcal{U} \cap M = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ para $\mathcal{U}$ y f como en la definición de subvariedad. Podemos suponer, quizá permutando las variables, que un menor no nulo de orden k de la matriz jacobiana es el formado por las k últimas columnas. El teorema de la función implícita prueba que existe $g : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}' \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\mathbf{a} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ de modo que

$$(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{para } \mathbf{x} \in (\mathcal{V} \times \mathcal{V}') \cap M.$$

Por tanto tomando $\mathcal{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ y $X : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ dada por $X(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, g(\mathbf{t}))$, se tiene que $X(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \cap M$ y obviamente $\operatorname{rg} DX = n$ (porque las n primeras filas de la jacobiana conforman la identidad). Además de cada punto de la imagen $(\mathbf{t}, g(\mathbf{t}))$ se recupera $\mathbf{t}$ de forma continua sin más que proyectar sobre las n primeras coordenadas, con lo cual X es homeomorfismo sobre su imagen.

Nota: Lo que hemos hecho no es otra cosa que aplicar una versión del teorema del rango en el caso sobreyectivo (véase la prueba dada en el capítulo anterior).

b) ⇒ *c*) Como DX tiene rango n, podemos suponer permutando las variables que un menor no nulo de orden n de la matriz jacobiana es el formado por las n primeras filas. Bajo esta hipótesis consideramos

$$G : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \qquad \text{dada por } G(\mathbf{t}, \mathbf{u}) = X(\mathbf{t}) + (\mathbf{0}, \mathbf{u}) \quad (\text{con } \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n).$$

Es fácil comprobar que el valor del determinante jacobiano de G coincide con el del menor no nulo al que nos habíamos referido. Si $\mathbf{t}_0$ es el punto de $\mathcal{V}$ con $X(\mathbf{t}_0) = \mathbf{a}$, aplicando el teorema de la función inversa en un entorno de $(\mathbf{t}_0, 0)$ se tiene que existe una inversa local $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}' \subset \mathcal{V} \times \mathbb{R}^k$ con $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$, $(\mathbf{t}_0, 0) \in \mathcal{U}'$. (Nótese de nuevo que simplemente seguimos los pasos de la demostración del teorema del rango, esta vez en el caso inyectivo).

Sea ϵ tal que la bola $B_\epsilon(\mathbf{t}_0, \mathbf{0})$ en $\mathbb{R}^{n+k}$ esté contenida en $\mathcal{U}'$, entonces $B_\epsilon(\mathbf{t}_0) \subset \mathcal{V}$ y por ser X homeomorfismo sobre su imagen $X(B_\epsilon(\mathbf{t}_0)) = \widetilde{\mathcal{U}} \cap M$ para algún entorno $\widetilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ de $\mathbf{a}$. Tomando ϵ suficientemente pequeño podemos conseguir que $\widetilde{\mathcal{U}}$ caiga dentro de $\mathcal{U}$ y por tanto, quizá restringiendo F, se puede suponer $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{U}' = B_\epsilon(\mathbf{t}_0)$. Veamos que F satisface la propiedad del enunciado

$$F(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{U}' \cap (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}).$$

Si $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap M$ entonces existe $\mathbf{t} \in B_\epsilon(\mathbf{t}_0)$ con $X(\mathbf{t}) = \mathbf{x}$ y $G(\mathbf{t}, \mathbf{0}) = \mathbf{x}$. Al ser F una inversa local de G se sigue que $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{t}, \mathbf{0}) \in \mathcal{U}' \cap (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\})$. Recíprocamente para cada $(\mathbf{t}, \mathbf{0}) \in \mathcal{U}'$, $G(\mathbf{t}, \mathbf{0}) \in \mathcal{U}$ y $G(\mathbf{t}, \mathbf{0}) = X(\mathbf{t}) \in M$.

$c) \Rightarrow a)$ Consideremos $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por las k últimas coordenadas de F. Por definición $f(\mathcal{U} \cap M) = \mathbf{0}$ y como DF es invertible cualesquiera k filas de su matriz jacobiana son linealmente independientes, en particular Df tiene rango k. ■

La prueba de $a) \Rightarrow b)$ tiene dos subproductos que indicamos a continuación como sendas proposiciones.

Proposición 3.2: *Una subvariedad $n-$dimensional M de $\mathbb{R}^{n+k}$ se puede escribir, quizá tras permutar las variables, localmente como la gráfica de una función. Concretamente, reordenando adecuadamente las variables, para cada $\mathbf{a} \in M$ existe un entorno suyo, $\mathcal{U}$, y una función diferenciable $g : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, tales que*

$$\mathcal{U} \cap M = \{(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}.$$

DEM.: Basta aplicar el teorema de la función implícita a la definición de subvariedad como hicimos en la prueba del teorema anterior. ■

Ejemplo . Comprobar que $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no es subvariedad mientras que $M = N \cap \{z > 0\}$ sí lo es. Escribir M en las formas equivalentes del teorema anterior.

El dibujo de N es un cono doble con vértice en el origen. Si fuera subvariedad, se podría escribir localmente como una gráfica, pero esto es imposible en un entorno del origen porque $x = \pm\sqrt{z^2 - y^2}$, $y = \pm\sqrt{z^2 - x^2}$, $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ no dan lugar a funciones bien definidas por el doble signo. Incluso si no lo tuvieran no serían válidas porque no son diferenciables en $(0,0)$ (las dos primeras ni siquiera están definidas en un entorno de este punto). En $M = N \cap \{z > 0\}$ no hay ese problema porque no se incluye el origen y $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ tiene gradiente no nulo en el resto de los puntos. Se puede dar una parametrización usando la gráfica de $\sqrt{x^2 + y^2}$, $X : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $X(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. También se cubre todo M con las dos parametrizaciones en polares $X_1 : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $X_2 : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respondiendo a la misma fórmula $X_i(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$ (el hecho de considerar dos es porque $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ no es un abierto). Por último, $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x,y,z) = (x, y, x^2 + y^2 - z^2)$ tiene todas las propiedades exigidas en *c*) con $\mathcal{U} = \{z > 0\}$.

La otra consecuencia de la prueba del teorema evita comprobar en las parametrizaciones la condición técnica de homeomorfismo siempre que sepamos de antemano que M es una subvariedad $n-$dimensional.

Proposición 3.3 : *Sea M una subvariedad $n-$dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$, entonces cualquier función inyectiva $Y : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ con $Y(\mathcal{V}) \subset M$ y $\operatorname{rg} DY = n$ es necesariamente una parametrización local.*

<u>Dem.</u>: Según el resultado anterior, quizá permutando las variables, se debe cumplir en un entorno de cualquier punto $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$

$$(Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots, Y_{n+k}) = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n),$$

con lo cual las k últimas filas de la jacobiana de Y son combinación lineal de las n primeras, que por la condición sobre el rango deben conformar un menor no nulo. El teorema de la función inversa asegura entonces que existe $H : \mathcal{V}_1 \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{V}_2 \overset{ab}{\subset} \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(Y \circ H)(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, g(\mathbf{t}))$. Como se explicó en la demostración de *a*) $\Rightarrow$ *b*) en el teorema anterior, la función $\mathbf{t} \mapsto (\mathbf{t}, g(\mathbf{t}))$ es una parametrización y por tanto $Y : \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ también lo es ya que H tiene inversa C^1.

Con esto hemos probado que Y es una parametrización si se restringe a un pequeño entorno de cualquier $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$. Que lo es en todo $\mathcal{V}$ se sigue de la inyectividad. ■

3.2. Espacios tangentes y normales

En el primer capítulo y su primera sección había un redundante exordio que nos trataba de convencer de que cuando miramos las cosas con lupa todo es aproximadamente lineal, de manera que las funciones diferenciables por raras que sean quedan bien aproximadas en pequeños abiertos por una simple y pedestre aplicación lineal. Continuando con esta poco aristocrática idea, vamos a rasar las curvas suaves de las subvariedades y en cada punto el rasero será el espacio tangente. Además resultará que si una función pasa una subvariedad a otra, los vectores tangentes (los habitantes del espacio tangente) viajan de la una a la otra por medio de la diferencial.

En primer lugar vamos a definir analíticamente lo que es un vector tangente. Para ello partimos de una idea física: una función $\alpha = \alpha(t)$ de un intervalo en $\mathbb{R}^m$ puede considerarse la ecuación de movimiento de una partícula (espacio en función del tiempo) y la velocidad, $\alpha'(t)$, es siempre tangente a la trayectoria. Así pues los vectores tangentes a una subvariedad en un punto son todas las posibles velocidades de las partículas que viajan por dentro de ella.

DEFINICIÓN: *Sea M una subvariedad $n-$dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$, se dice que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+k}$ es un* <u>vector tangente</u> *a M en $\mathbf{a}$ si existe $\alpha : I \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, $\alpha \in C^1$, con $I \subset \mathbb{R}$ un entorno del origen (que podemos suponer un intervalo) tal que $\alpha(0) = \mathbf{a}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.*

Nótese que el papel desempeñado por el origen en esta definición es superfluo. Con la interpretación anterior, siempre podemos restar un tiempo inicial para que el instante en el que la partícula pase por el punto deseado sea $t = 0$.

> *Cuando se mueve un cuerpo me valgo del tiempo para medir la duración del movimiento del cuerpo, desde que comienza a moverse hasta que acaba. Y si no lo veo comenzar a moverse y sigue moviéndose -ni veo tampoco cuándo acaba- no puedo medir su duración. A no ser que comience a contarla desde que lo vi hasta que dejé de verlo.*
> Confesiones. Libro XI, 24.

DEFINICIÓN: *Se llama* <u>espacio tangente</u> *de una subvariedad M en un punto $\mathbf{a} \in M$, y se escribe $T_{\mathbf{a}}(M)$, al conjunto formado por todos los vectores tangentes.*

Observación: Nótese que el vector $\mathbf{0}$ siempre está en $T_{\mathbf{a}}(M)$; basta tomar como α la función que vale constantemente $\mathbf{a}$ (que corresponde a una partícula en reposo).

Como habíamos mencionado, si una función aplica una subvariedad en otra, la diferencial hace lo mismo con los espacios tangentes. Esto explica en parte por qué nos habíamos encabezonado en considerar la diferencial como una aplicación lineal y no como unos cuantos números que forman una matriz: en los espacios tangentes de las subvariedades no hay una base canónica destacada por lo que tenemos que estar preparados para cambiar la matriz de la aplicación lineal en función de la base elegida. Por ejemplo, dentro de un cuatrimestre aparecerá en Geometría II la segunda forma fundamental construida a partir de la diferencial de la aplicación normal asociada a una superficie, que adquirirá diferentes expresiones dependiendo de las coordenadas elegidas para parametrizar dicha superficie.

Proposición 3.4 : *Sean $M \subset \mathbb{R}^m$ y $N \subset \mathbb{R}^n$ subvariedades y supongamos que existe $f : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, tal que $M \subset \mathcal{U}$ y $f(M) \subset N$, entonces*

$$\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}(M) \;\Rightarrow\; Df(\mathbf{a})\mathbf{v} \in T_{f(\mathbf{a})}(N)$$

para todo $\mathbf{a} \in M$.

DEM.: Si $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}(M)$ existe $\alpha : I \longrightarrow M$ con $\alpha(0) = \mathbf{a}$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Definiendo $\beta : I \longrightarrow N$ como $\beta = f \circ \alpha$ se tiene por la regla de la cadena

$$\beta'(0) = Df(\mathbf{a})\alpha'(0) = Df(\mathbf{a})\mathbf{v}$$

y obviamente $\beta(0) = f(\mathbf{a})$. ■

Si el espacio tangente es lo que su nombre y su idea geométrica indican, debe ser un espacio vectorial. Su dimensión refleja la de la subvariedad, ya que trata de aproximarla, de modo que las curvas tienen rectas tangentes, las superficies tienen planos tangentes...

Teorema 3.5 : *Sea M una subvariedad $n-$dimensional de $\mathbb{R}^{n+k}$, entonces $T_{\mathbf{a}}(M)$ es un espacio vectorial de dimensión n para cada $\mathbf{a} \in M$. Además se tiene*

$$T_{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{Ker} Df(\mathbf{a})$$

donde f es como en la definición de subvariedad y Ker *indica el núcleo.*

DEM.: Basta demostrar $T_{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{Ker} Df(\mathbf{a})$ porque de ahí se deduce que $T_{\mathbf{a}}(M)$ es un espacio vectorial y la fórmula

$$\dim \operatorname{Ker} Df(\mathbf{a}) + \dim \operatorname{Im} Df(\mathbf{a}) = \dim \mathbb{R}^{n+k}$$

implica que es de dimensión n ya que $\dim \operatorname{Im} Df(\mathbf{a}) = \operatorname{rg} Df(\mathbf{a}) = k$.

La función f aplica $\mathcal{U} \cap M$ en $N = \{\mathbf{0}\}$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno de $\mathbf{a}$, y claramente el único vector tangente de N es el nulo (si sólo hay un punto para situar una partícula, debe estar quieta). Por tanto, según la proposición anterior $Df(\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $T_{\mathbf{a}}(M) \subset \operatorname{Ker} Df(\mathbf{a})$.

Para probar la otra inclusión basta demostrar $\dim T_{\mathbf{a}}(M) \ge n$ ya que sabíamos que $\dim \operatorname{Ker} Df(\mathbf{a}) = n$. Supongamos que la función F del teorema 3.1 *c*) aplica $\mathbf{a}$ en $(\mathbf{t}_0, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ definida por $\alpha(t) = F^{-1}(\mathbf{t}_0 + \mathbf{w}t, \mathbf{0})$ con $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ entonces $\alpha(0) = \mathbf{a}$ y $\alpha'(0) = DF^{-1}(\mathbf{t}_0, \mathbf{0})\widetilde{\mathbf{w}}$ con $\widetilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Al ser F un difeomorfismo, DF^{-1} es un isomorfismo y aplica el subespacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$ formado por todos los $\widetilde{\mathbf{w}}$ en algún subespacio del espacio tangente de dimensión n, por tanto $\dim T_{\mathbf{a}}(M) \ge n$. ■

Si tenemos definida una subvariedad por medio de parametrizaciones locales, hallar el espacio tangente es muy sencillo.

Proposición 3.6 : *Sea $X : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ como en el teorema* 3.1 *b*) *con $X(\mathbf{t}_0) = \mathbf{a}$, entonces $T_{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{Im} DX(\mathbf{t}_0)$.*

Observación: Si componemos X con una inmersión $\mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ (una función cuya diferencial es inyectiva), un poco de álgebra lineal muestra que el espacio tangente correspondiente será isomorfo. Es decir, que si pensamos por ejemplo en una superficie esférica como una colección de planos tangentes pegados de cierta manera, da igual, en cierto sentido, que la introduzcamos en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^p$. Hay algo intrínseco a una superficie esférica independientemente del espacio en que nos parezca conveniente que viva en cada situación particular y de la forma en que la parametricemos.

Sólo lo que permanece inmutable existe de verdad. Confesiones. Libro VII, 11.

DEM.: Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ dada por $\alpha(t) = X(\mathbf{t}_0 + \mathbf{v}t)$, entonces $\alpha(0) = \mathbf{a}$ y $\alpha'(0) = DX(\mathbf{t}_0)\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}(M)$, por tanto $\operatorname{Im} DX(\mathbf{t}_0) \subset T_{\mathbf{a}}(M)$. Además $\dim \operatorname{Im} DX(\mathbf{t}_0) = \operatorname{rg} DX(\mathbf{t}_0)$ y $\operatorname{rg} DX(\mathbf{t}_0) = n = \dim T_{\mathbf{a}}(M)$, así que ambos espacios deben coincidir. ■

En cursos anteriores más que calcular espacios tangentes hemos hallado rectas tangentes o planos tangentes y, a veces, de propina rectas normales y planos normales. Para ello sólo hay que trasladar el espacio tangente (o normal) al punto que nos manden. En Álgebra Lineal y en Geometría I nos decían que esto era un espacio afín.

DEFINICIÓN: *Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ una subvariedad y $\mathbf{a} \in M$. Se llama hiperplano tangente a M en $\mathbf{a}$ al espacio afín*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+k} \,:\, \mathbf{x} - \mathbf{a} \in T_{\mathbf{a}}(M)\},$$

y se llama hiperplano normal a M en $\mathbf{a}$ al espacio afín

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+k} \,:\, \mathbf{x} - \mathbf{a} \in \big(T_{\mathbf{a}}(M)\big)^{\perp}\}$$

donde $\big(T_{\mathbf{a}}(M)\big)^{\perp}$ es el espacio normal, esto es, el complemento ortogonal de $T_{\mathbf{a}}(M)$ en $\mathbb{R}^{n+k}$.

Observación: Nótese que si la subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k}$ tiene dimensión n entonces el hiperplano tangente tiene dimensión n y el normal tiene dimensión k. Obviamente, en los casos de dimensiones uno y dos se suelen llamar rectas y planos tangentes o normales.

Ejemplo . Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto genérico (x_0, y_0) de la elipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$.

La función que define la subvariedad E es $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$ cuya matriz jacobiana es la matriz fila $(\, 2x_0/a^2 \quad 2y_0/b^2 \,)$, por tanto

$$T_{(x_0,y_0)}(E) = \operatorname{Ker} Df(x_0, y_0) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x_0 v_1/a^2 + 2y_0 v_2/b^2 = 0\}.$$

Es un simple ejercicio de álgebra lineal comprobar que este subespacio está generado por $\mathbf{v} = (y_0/b^2, -x_0/a^2)$. Más sencillo todavía es hallar el espacio normal, porque según lo anterior el tangente está formado por los vectores ortogonales a $\mathbf{w} = (x_0/a^2, y_0/b^2)$, con lo cual este vector genera el normal (es sólo pensarlo un momento: $T_{\mathbf{a}}(M) = V^{\perp} \Rightarrow \big(T_{\mathbf{a}}(M)\big)^{\perp} = \big(V^{\perp}\big)^{\perp} = V$). Por tanto las rectas tangente y normal son en forma vectorial

$$r_{\tan} :\ (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(y_0/b^2, -x_0/a^2), \qquad r_{\text{nor}} :\ (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x_0/a^2, y_0/b^2).$$

Al pasarlas a forma cartesiana, la recta tangente presenta un aspecto especialmente atractivo después de usar la relación $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$

$$r_{\tan} :\ \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Ejemplo . Calcular una base del espacio tangente y del espacio normal del toro

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

en el punto $(0, 1, 1, 0)$.

Si $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 0)$ y $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1)$ se tiene

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$T_{\mathbf{a}}(M) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \ : \ v_2 = v_3 = 0\}$$

y una base de este espacio es obviamente $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\}$ donde $\mathbf{e}_i$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$. De aquí se obtiene que una base para el espacio normal es $\mathcal{B}_\perp = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Observación: Nótese que $X(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v)$ es una parametrización de M en un entorno de $(u_0, v_0) = (\pi/2, 0)$ con $X(u_0, v_0) = \mathbf{a}$, así pues podríamos haber obtenido $\mathcal{B}$ como las columnas de $X'(u_0, v_0)$, las cuales generan $\operatorname{Im} DX(u_0, v_0)$.

3.3. Máximos y mínimos condicionados

Incluso los problemas más sencillos de máximos y mínimos que resolvíamos en cursos pasados solían conllevar relaciones entre las variables. Por ejemplo, ése típico de hallar el rectángulo de área máxima y perímetro 4. La función a maximizar es $A = b \cdot a$ pero la condición sobre el perímetro implica $2b + 2a = 4$ y por tanto basta con que despejemos b y maximicemos $A = (2 - a)a$. En general las cosas no son tan bonitas porque si la relación entre las variables es muy complicada no se puede despejar de verdad, esto es, usando funciones elementales, aunque el teorema de la función implícita nos diga que hay una función que nos serviría para despejar en el mejor de los mundos posibles.

La regla de los multiplicadores de Lagrange permite resolver algunos de estos problemas siempre que la relación entre las variables defina una subvariedad. Como sugiere la siguiente definición, esto se puede interpretar como condicionar o restringir la función a los puntos de la subvariedad.

Definición: *Sea $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ con $M \overset{ab}{\subset} A$. Se dice que f alcanza en $\mathbf{a} \in M$ un extremo local condicionado a M si $\mathbf{a}$ tiene un entorno $\mathcal{U}$ tal que o bien $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{x} \in M \cap \mathcal{U}$ o bien $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{x} \in M \cap \mathcal{U}$. En estos casos se dice, respectivamente, que se alcanza un máximo local condicionado y un mínimo local condicionado.*

El siguiente resultado permitirá calcular en muchos casos los extremos condicionados.

Teorema 3.7 (regla de los multiplicadores de Lagrange): *Sea* $f : A \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, $\mathbf{a}$ *extremo local condicionado a* $M \subset A$ *y* $g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$ *la función que define* M *en un entorno* $\mathcal{U} \subset A$ *de* $\mathbf{a}$*, esto es,*

$$M \cap \mathcal{U} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \,:\, g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}, \qquad g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^k, \ \operatorname{rg} Dg(\mathbf{a}) = k < n.$$

Entonces existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *tales que* $\mathbf{a}$ *es un punto crítico de la llamada* *función de Lagrange*, $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$*, dada por*

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 g_2(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_k g_k(\mathbf{x}).$$

En una primera lectura el teorema parece un poco inútil porque no conocemos los λ_i ni, por tanto, la función de Lagrange. Una segunda lectura, y sobre todo los ejemplos tras la demostración, nos muestra que las ecuaciones $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y $\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ son $n + k$ y debemos hallar las n coordenadas de $\mathbf{x}$ y k parámetros, con lo cual no hay problema (bueno, lo hay pero es de esperar que tenga solución).

DEM.: Sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}M$. Por definición existe $\alpha : I \longrightarrow M$ con $\alpha(0) = \mathbf{a}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Si $\mathbf{a}$ es extremo local la función de una variable $f \circ \alpha$ debe tener derivada nula en $t = 0$,

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \nabla f(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Como $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}M$ es arbitrario, $\nabla f(\mathbf{a})$ pertenece al espacio normal en $\mathbf{a}$, el cual está generado por $\nabla g_1(\mathbf{a}),\dots,\nabla g_k(\mathbf{a})$ (nótese que $g \circ \alpha = \mathbf{0} \Rightarrow g'(\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ cuya $i-$ésima componente es $\nabla g_i(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$). Por tanto es combinación lineal de ellos y existen $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ tales que

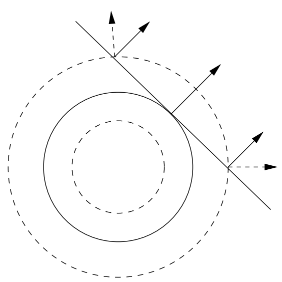
$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a})$$

y esto equivale a la conclusión buscada. ■

Veamos en primer lugar un ejemplo bastante trivial que ilustra la sencilla idea geométrica que se esconde detrás de la regla de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo . Calcular el mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la recta $x + y = 1$.

Podemos representar cada curva de nivel $f(x, y) = c$ como una circunferencia de radio $\sqrt{c}$, de modo que el problema se reduce a encontrar la menor circunferencia que llega a tocar a $x+y = 1$. Claramente esto sucederá cuando $x^2+y^2 = c$ y $x+y = 1$ sean tangentes, o equivalentemente cuando los espacios normales coincidan en cierto punto común.



Tanto si usamos esta idea geométrica y que el gradiente es perpendicular a las curvas de nivel, como si aplicamos la regla de los multiplicadores de Lagrange, se llega a

$$\nabla f = \lambda \nabla g \;\Rightarrow\; (2x, 2y) = \lambda(1,1) \;\Rightarrow\; x = y,$$

que sustituido en las ecuaciones implica $x = y = c = 1/2$.

Ejemplo . Hallar los puntos más cercanos al origen de la curva regular $C \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dejamos al lector comprobar que realmente C es una curva regular (subvariedad de dimensión uno). Debemos minimizar

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

pero como ya hemos empleado anteriormente, los puntos que minimicen d también minimizarán su cuadrado, que es más sencillo de manipular. Por tanto tomamos con la notación del teorema

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

y, evidentemente, $g_1(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - z^2 - 1$ y $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$. Al imponer que la función de Lagrange tenga un punto crítico se obtiene

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x = \lambda_1(2x + y) + 2\lambda_2 x \\ 2y = \lambda_1(x + 2y) + 2\lambda_2 y \\ 2z = -2\lambda_1 z \end{cases}$$

De la última ecuación se deduce que $z = 0$ o $\lambda_1 = -1$. Si $z = 0$, sustituyendo en las restricciones $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ y restando los resultados se tiene $xy = 0$, es decir, $y = 0$ o $x = 0$ y estas dos posibilidades llevan (sustituyendo de nuevo) a los puntos

$$\mathbf{a}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{a}_2 = (-1,0,0), \quad \mathbf{a}_3 = (0,1,0), \quad \mathbf{a}_4 = (0,-1,0).$$

Por otra parte, si $\lambda = -1$ al sustituir en las dos primeras ecuaciones del sistema anterior

$$\begin{cases} 4x + y = 2\lambda_2 x \\ x + 4y = 2\lambda_2 y \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por y, la segunda por x y restando los resultados se llega a $x = \pm y$ que sustituido en $g_1 = g_2 = 0$ conduce a

$$\mathbf{a}_5 = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \qquad \mathbf{a}_6 = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big),$$

$$\mathbf{a}_7 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big), \qquad \mathbf{a}_8 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

De todos los puntos obtenidos, posibles extremos; sustituyéndolos en $d(x, y, z)$ se comprueba que los más cercanos al origen son los cuatro primeros, todos ellos a distancia uno.

Ejemplo . Hallar el máximo de $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ en la región $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ con $x_i \in \mathbb{R}^+$.

No es imprescindible el uso de la regla de los multiplicadores de Lagrange porque es fácil despejar cualquiera de las variables y sustituir, sin embargo los cálculos se vuelven sencillos y simétricos al usarla.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \;\Rightarrow\; x_2 x_3 x_4 \cdots x_n = \lambda,\; x_1 x_3 x_4 \cdots x_n = \lambda,\; \ldots\; x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-1} = \lambda.$$

Multiplicando la primera ecuación por x_1, la segunda por x_2, etc. y sumando los resultados se obtiene $n x_1 x_2 \cdots x_n = \lambda$. Diviendo esta igualdad por cada una de las ecuaciones se deduce $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1/n$ y el máximo de f es $1/n^n$.

Los máximos y mínimos condicionados sirven para probar muchas de las desigualdades clásicas (Cauchy-Schwarz, Hölder, Minkowski,...) de forma sencilla, aunque se suelen preferir demostraciones más complejas pero elementales.

Ejemplo . Utilizar el resultado del ejemplo anterior para probar la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \qquad \text{para } a_1, a_2, \dots, a_n > 0.$$

Elevando a la $n-$ésima potencia la desigualdad se transforma en

$$x_1 x_2 \cdots x_n \le \frac{1}{n^n} \qquad \text{con } x_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

que es justamente el resultado del ejemplo anterior porque $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. También se deduce que la igualdad sólo se puede dar si todos los a_i coinciden ($x_i = 1/n$).

El lector más exigente quizá se haya percatado de que la prueba de la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica no es totalmente completa porque se basa en la suposición no probada, tomada del enunciado del ejemplo previo, de que $f = x_1 x_2 \cdots x_n$ alcanza un máximo (absoluto) en

$$M = \{\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^+)^n \, : \, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}.$$

Nótese que por ejemplo $f(x) = x(x-1)(x-2)$ no alcanza un máximo en $\mathbb{R}^+$ porque no está acotada superiormente (sin embargo tiene un máximo local). Después de pensarlo un poco parece claro que en nuestro caso debe existir tal máximo, y es casi evidente mirando con ojos $n-$dimensionales, pero lo que buscamos un razonamiento riguroso.

> *Quería estar tan cierto de estas cosas a mis ojos como de que tres y siete son diez, pues no estaba tan fuera de mis cabales que pensara que ni esto se podía entender.*
> Confesiones. Libro VI, 4.

La clave está en la compacidad. Si añadimos a M su frontera (en topología se dice que esto es tomar el cierre de M) se obtiene el subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$\overline{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, x_i \geq 0, \; x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}.$$

Como $\overline{M}$ es compacto, por ser cerrado y acotado, f debe alcanzar un máximo y un mínimo en $\overline{M}$. Por otra parte en la frontera $\overline{M} - M$ la función f se anula alcanzando un mínimo, así pues el máximo debe alcanzarse en M.

Hay que tener buen cuidado de aplicar la regla de los multiplicadores de Lagrange sólo en el caso en que la condición defina una subvariedad diferenciable, en otro caso el resultado puede ser incorrecto. Por ejemplo (véase **[Ga-Lo-Ro-Ro-Vi]** p. 213), la función $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ alcanza un mínimo condicionado a $y^2 = x^3$ en $(0,0)$ porque para x positivo $(x+1)^2 \geq (0+1)^2$, $y^2 \geq 0^2$. Sin embargo se puede comprobar que la función de Lagrange no tiene puntos críticos. La explicación es, como hemos apuntado antes, que $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y^2 = x^3\}$ no es una subvariedad diferenciable. Para poder tratar estos casos muchas veces es posible subdividir el conjunto en cuestión en varios trozos que sean subvariedades. Por ejemplo,

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{(x,y) \, : \, y > 0, \; y^2 = x^3\} \cup \{(x,y) \, : \, y < 0, \; y^2 = x^3\} \cup \{(0,0)\}.$$

Como la última subvariedad es un punto, en él se alcanza el máximo y el mínimo de f condicionado a M_3. Por otra parte, f no tiene extremos condicionados a M_1 ni a M_2. Nótese que el olvidarnos de las variedades $0-$dimensionales nos habría llevado a error.

Ejemplo . Expresar $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z \leq 1 - x^2 - y^2, \; z \geq 0\}$ como unión de subvariedades diferenciables de $\mathbb{R}^3$.

Escribiremos $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ donde M_1 es el interior y M_2, M_3, M_4 son diferentes porciones de la frontera. Concretamente

$$M_1 = \{(x,y,z) \,:\, z < 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\} \qquad M_3 = \{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$$
$$M_2 = \{(x,y,z) \,:\, z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\} \qquad M_4 = \{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$$

Es muy fácil comprobar que M_1, M_2, M_3 y M_4 son realmente subvariedades y que $\dim M_1 = 3$, $\dim M_2 = 2$, $\dim M_3 = 2$, $\dim M_4 = 1$.

Si tuviéramos que hallar los máximos y mínimos de una función condicionados a M, en la parte correspondiente a M_1 no sería necesario usar la regla de los multiplicadores de Lagrange porque M_1 es un abierto de $\mathbb{R}^3$, no hay ecuaciones no triviales que definan M_1 en dicho abierto. Bastaría usar el método recordado en el primer capítulo eligiendo sólo los puntos críticos que caen en M_1.

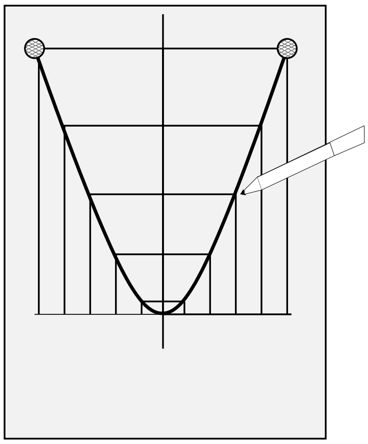
Variaciones sobre la cadena

Material:

- Una cadena homogénea con eslabones pequeños (por ejemplo de joyería).
- Una hoja de papel milimetrado.
- Un cartón.
- Dos chinchetas.
- Un rotulador de punta fina.
- Una calculadora.

Objetivos: Mostrar la relación entre el cálculo de variaciones y los multiplicadores de Lagrange deduciendo la ecuación de la catenaria.

El experimento: Elijamos dos puntos destacados (digamos de coordenadas enteras) en una misma horizontal del papel milimetrado y clavemos allí con las chinchetas los eslabones de los extremos de la cadena poniendo debajo el cartón. Señalemos la mediatriz (perpendicular en el punto medio) del segmento que une las chinchetas. Cuando pongamos el cartón en vertical y dejemos a la cadena colgar libremente, por la simetría, el punto más bajo pertenecerá a dicha mediatriz. Señalémoslo con el rotulador y marquemos también los puntos de la cadena que pertenecen a las paralelas a la mediatriz a distancias 1, 2, 3, etc. Todo esto se puede hacer cómodamente en horizontal abatiendo el cartón con cuidado para que no se deforme la curva descrita por la cadena.



Después de desclavar la cadena, consideremos unos ejes cartesianos cuyo origen es el punto más bajo y calculemos, mirando las divisiones del papel milimetrado, las coordenadas del resto de los puntos señalados, los cuales serán de la forma (x_n, y_n) con $x_n = n \in \mathbb{Z}$. Aquí citaremos los siguientes datos obtenidos de un experimento real*

$$\begin{array}{lllll} y_0 = 0 & y_2 = 0'65 & y_4 = 2'9 & y_6 = 7'55 & y_8 = 15'75 \\ y_1 = 0'2 & y_3 = 1'6 & y_5 = 4'95 & y_7 = 11'1 & y_9 = 23'5 \end{array}$$

Sea (r_0, s_0) el punto donde está una de las chinchetas, en el caso antes citado $(r_0, s_0) = (\pm 9, 23'5)$, y hállese la solución aproximada, a, de la ecuación

$$s_0 = a\big(\cosh\frac{r_0}{a} - 1\big).$$

Esto puede hacerse aplicando el método de Newton (por ejemplo a la función $f(x) = s_0/a - \cosh(r_0/a) + 1$). Para $r_0 = 9$, $s_0 = 23'5$ se obtiene $a = 3'20241\dots$ Calculemos finalmente para cada y_n el valor de $a \operatorname{arc}\cosh(1 + y_n/a)$. En nuestro caso

$$\begin{array}{lll} y_1 = 0'2 \mapsto 1'126 & y_4 = 2'9 \mapsto 4'037 & y_7 = 11'1 \mapsto 6'971 \\ y_2 = 0'65 \mapsto 2'007 & y_5 = 4'95 \mapsto 5'081 & y_8 = 15'75 \mapsto 7'891 \\ y_3 = 1'6 \mapsto 3'081 & y_6 = 7'55 \mapsto 6'025 & y_9 = 23'5 \mapsto 9 \end{array}$$

y, obviamente, $y_0 \mapsto 0$. A la vista de estos datos, se cumple con gran aproximación $x_n = a \operatorname{arc}\cosh(1 + y_n/a)$, o lo que es lo mismo, hemos probado experimentalmente que la ecuación de una cadena que cuelga de sus extremos es de (salvo traslaciones) de la forma

$$\boxed{y = a\big(\cosh\frac{x}{a} - 1\big)}$$

A la curva representada por esta ecuación (o a su trasladada) se le llama catenaria.

Nota histórica: Galileo pensó equivocadamente que la curva descrita por una cadena era una parabola. Hubo que esperar hasta casi 50 años después de su muerte para que Huygens, Leibniz y Johann Bernoulli encontraran la ecuación correcta.

Un principio físico importante: Se puede deducir rápidamente la ecuación de la catenaria utilizando mecánica elemental, sin embargo para los principiantes es un

* *N. del A.* Utilicé una cadena como las que se usan para llevar medallas. Los eslabones eran de $2\,mm$ y la longitud de unos $53\,cm$. Clavé las chinchetas con una separación de $18\,cm$, con lo cual señalé 9 puntos a cada lado. La práctica muestra que es muy importante forzar la simetría con respecto a la mediatriz, lo que asegurará la perfecta horizontalidad. Para mayor precisión reemplacé y_n por $(y_n + y_{-n})/2$.

poco difícil de entender la introducción de las fuerzas virtuales que representan las tensiones. Lo que haremos aquí es deducir la ecuación de una forma muchísimo más compleja matemáticamente pero a partir de un sencillo principio que tiene una relevancia enorme en la Física actual. De forma un poco tosca, se puede reducir a:

Los sistemas físicos siempre tienden a la mínima energía.

Maupertius fue el primero que lo enunció en 1746 y pensaba que era tan poderoso que podía explicar prácticamente todos los fenómenos. Además creyó que tenía significado teológico.

Para aplicar el principio anterior a una cadena que cuelga por sus extremos, podemos considerarla formada por infinidad de partículas estáticas que sólo tienen energía potencial, mgh, donde m es la masa, h la altura y $g \approx 9'8$ es la aceleración de la gravedad. La energía total de la cadena será

$$E = \int gh\, dm = \rho g \int h\, ds$$

donde se ha usado que la densidad lineal es constante de modo que la masa dm es proporcional a la longitud ds. Para cada valor de x se tiene $h = y(x)$ y es fácil convencerse geométricamente de que $ds/dx = \sqrt{1+(y')^2}$ (por Pitágoras $(ds/dx)^2 = (dx/dx)^2 + (dy/dx)^2$), con lo cual

$$E = \rho g \int y\sqrt{1+(y')^2}.$$

Supongamos que nuestra cadena es de longitud l y la colgamos por sus extremos de (c, H) y (d, H), $c < d$. Según el principio anterior, *la ecuación de la catenaria será la función* $y : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$y(c) = y(d) = H, \qquad \int_c^d \sqrt{1+(y')^2} = l \quad \text{y} \quad \int_c^d y\sqrt{1+(y')^2} \quad \textit{es mínimo.}$$

El problema matemático y su solución: El problema matemático general al que nos enfrentamos es hallar (suponiendo que exista) la función y que tiene extremos prefijados y para la cual $\int f(y, y')$ alcanza un extremo cuando se satisface la condición $\int g(y, y') = 0$.

El *cálculo de variaciones* se ocupa de este tipo de problemas. Aquí veremos una solución más compleja que la habitual pero que muestra la relación con los multiplicadores de Lagrange. Para ello consideremos $y_n = y(x_n)$ con $x_n = c + nh$, $h = (d - c)/N$

y $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Con esto hemos discretizado el problema y obtenemos la versión continua en el límite

$$\int f(y, y') = \lim_{N\to\infty} hF_N \qquad \text{con} \qquad F_N(y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} f(y_n, (y_{n+1} - y_n)/h)$$

(nótese que los valores de y_0 y de y_N están fijados) y lo mismo podríamos hacer con $\int g(y, y')$ y la correspondiente $G_N = G_N(y_1, y_2, \ldots, y_{N-1})$. Según el método de los multiplicadores de Lagrange, si F_N alcanza un extremo condicionado a $G_N = 0$, se debe cumplir $D_k(F_N - \lambda G_N) = 0$ para $1 \le k < N$. Definiendo $\mathcal{L} = f - \lambda g$, no es difícil comprobar que esta ecuación lleva a

$$D_1\mathcal{L}\big(y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{h}\big) = \frac{1}{h}\bigg(D_2\mathcal{L}\big(y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{h}\big) - D_2\mathcal{L}\big(y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{h}\big)\bigg).$$

Utilizando el teorema del valor medio y que $(y_{k+1} - y_k)/h \to y'(x_k)$ y $\big((y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})\big)/h^2 \to y''(x_k)$, se deduce tomando límites, que si confiamos en la *convergencia* de las soluciones de los problemas discretizados a la de nuestro problema, ésta debe satisfacer la <u>ecuación de Euler-Lagrange</u>

$$\boxed{D_1\mathcal{L}(y, y') = D_{12}\mathcal{L}(y, y')y' + D_{22}\mathcal{L}(y, y')y''} \qquad \text{con } \mathcal{L} = f - \lambda g.$$

En el caso antes citado de la cadena, $f(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$ y $g(y, y') = \sqrt{1 + (y')^2} - \text{cte}$. Sustituyendo se llega, después de algunos cálculos a la ecuación diferencial

$$y''(y - \lambda) = 1 + (y')^2$$

cuya solución general es (preguntar al profesor de E.D.O.)

$$y = a \cosh\big(\frac{x}{a} + b\big) + \lambda.$$

Si como en nuestro experimento, imponemos $y(0) = 0$ y que los puntos donde suspendemos la cadena son simétricos respecto al eje vertical, $y(x_0) = y(-x_0)$, se llega a que la ecuación es del tipo

$$y = a\big(\cosh\frac{x}{a} - 1\big),$$

como queríamos probar.

¿No es increíble que los eslabones de una cadena “sepan” colocarse en la posición que minimiza la energía?

Toboganes y braquistocronas

Material:

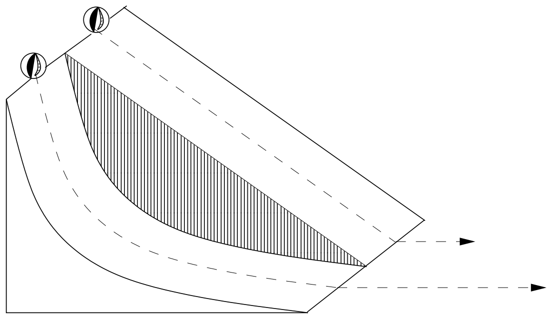
- Cartón o cartulina.
- Dos canicas iguales.
- Una calculadora.

Objetivos: Deducir la ecuación de la braquistocrona y comprobar experimentalmente su propiedad minimizante.

El experimento: Realizaremos con el cartón o cartulina dos toboganes conectando los puntos $(0, h)$ y $(l, 0)$ de un plano vertical. El primero será simplemente una rampa recta y el segundo tendrá el perfil de una curva cicloide que responde a la parametrización

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = h + a(\cos t - 1).$$

El valor de a se calcula de manera que la curva pase por $(l, 0)$ con lo cual se debe resolver el sistema $a(t - \operatorname{sen} t) = l$, $a(1 - \cos t) = h$. Dividiendo ambas ecuaciones y operando se llega a una ecuación para t que se puede resolver aproximadamente con la calculadora usando el método de Newton, después basta tomar $a = h/(1 - \cos t)$. Los datos correspondientes a un experimento real* son $h = 10\,cm$, $l = 16\,cm$, de donde se dedujo de esta forma $a \approx 5'002$.



Una vez construidos ambos toboganes los pondremos uno al lado del otro y dejaremos caer las canicas simultáneamente desde ambos. Comprobaremos que el tobogán con forma de cicloide es más rápido que el que tiene la forma recta habitual y de hecho, como veremos a continuación, teóricamente es más rápido que cualquier otro. Por esta razón se dice que la cicloide es la braquistocrona (de $\beta\rho\alpha\chi\upsilon\varsigma =$ breve y $\chi\rho o\nu o\varsigma =$ tiempo).

* *N. del A.* Utilicé una cartulina un poco blanda por lo cual encajoné los toboganes usando un juego de construcción. Para obtener el perfil con forma de cicloide simplemente di valores a t y pinté los puntos correspondientes en la cartulina. Si uno utiliza un ordenador con este propósito hay que asegurarse que no modifica las escalas de x e y. Es conveniente que la pendiente a salvar por los toboganes sea mayor del 60% (concretamente $h/l \geq 2/\pi$) porque de otro modo es difícil llevar la forma a la práctica. Las condiciones ideales del experimento serían ausencia de rozamiento y que las canicas más que rodar se deslizasen, pero esto último, casi imposible de conseguir, no parece demasiado crítico.

Nota histórica: Galileo mencionó en 1588 el problema de la braquistocrona que estudió experimentalmente sin éxito (pensó que un arco de circunferencia lo resolvía). Johann Bernoulli halló la solución del problema y lo propuso en 1697 a los matemáticos de su tiempo. Según se dice, a Leibniz le llevó seis meses resolverlo y a Newton sólo una tarde.

La explicación: Por la conservación de la energía, la energía potencial mgh que tiene inicialmente cada canica se va transformando en energía cinética a medida que baja, de manera que al recorrer la curva $y = y(x)$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

A partir de esta fórmula para la velocidad podemos expresar el tiempo total de bajada como

$$T = \int_0^l \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}\, dx = \int_0^l \frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}} \cdot \sqrt{1+(y')^2}\, dx,$$

donde se ha usado $v = ds/dt$ donde s indica el espacio recorrido, y $ds/dx = \sqrt{1+(y')^2}$. El tobogán más rápido será por tanto aquél para el que la integral anterior sea mínima. Como no hay ningún condicionamiento adicional, al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange citada en el experimento anterior se puede tomar $g(y,y') \equiv 0$, con lo cual debe cumplirse

$$D_1 f(y,y') = D_{12} f(y,y')y' + D_{22} f(y,y')y'' \qquad \text{donde} \qquad f(y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{h-y}}.$$

Sustituyendo, tras algunos cálculos tediosos, se llega a la ecuación diferencial

$$2(h-y)y'' = 1 + (y')^2,$$

cuyas soluciones con $y(0) = h$ tienen la forma paramétrica (preguntar de nuevo al profesor de E.D.O. acerca de los "trucos" necesarios)

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = h + a(\cos t - 1)$$

donde a es una constante.

4. Integrales de línea, superficie y volumen

En este capítulo estudiaremos los tres tipos de integrales que se mencionan en el epígrafe. El último es bien conocido del curso anterior y quizá también el primero al menos en $\mathbb{R}^2$, pero seguramente sea la primera cita del lector bisoño con la integral de una función vectorial sobre una superficie. Las tres integrales admiten palmarias interpretaciones físicas que adelantan algunas propiedades teóricas, especialmente la invariancia por cambios de coordenadas que nosotros, rezagados matemáticos, veremos con gran esfuerzo en la segunda sección. Los que, a pesar de estos indicios, con obcecación reticente no quieran saber nada de interpretaciones físicas debieran obligarse a leer la última sección en la que se atisban todos los tipos de integrales posibles que se pueden crear matemáticamente en el universo $n-$dimensional. Debido a que muchos de los fenómenos que nos rodean son provincianos de $\mathbb{R}^3$, las leyes básicas que los describen sólo necesitan las integrales de este capítulo, de ahí su importancia.

4.1. Definición y significado

Para ser sinceros, hay que confesar que con el nuevo plan no se ve en toda la licenciatura de Matemáticas de la UAM la definición rigurosa de integrales en curvas o superficies. Por ello el título de esta sección merece una excusa pedagógica:

Si diéramos clases particulares a un alumno de bachillerato y nos dijera que tiene que saber qué es la integral para un examen inminente, ¿qué le contaríamos? Seguramente cosas como que la integral es el área, que $\int x^n = x^{n+1}/(n+1) + K$, que es lo contrario que derivar, que hay que sustituir los extremos del intervalo, etc. Si le dijéramos la verdad, esto es, que la integral es el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las superiores cuando coinciden, le habríamos dicho todo al tiempo porque de esta definición se pueden deducir todas las propiedades, pero probablemente se cambiaría de profesor particular porque es difícil que nos entienda y, a fin de cuentas, eso no se lo van a preguntar en el examen.

> *Comencé dando clases en mi casa, donde reuní un número de alumnos que habían oído hablar de mí y que, a su vez, me fueron dando a conocer.*
>
> *Me di cuenta ahora de que en Roma había dificultades con las que no tuve que enfrentarme en África. Cierto que aquí no encontré las gamberradas de estudiantes alborotadores de Cartago, pero llegué a saber que, en cualquier momento, los estudiantes se podían amotinar para no pagar el estipendio a sus maestros y pasarse a otro maestro.*
> Confesiones. Libro V, 12.

De alguna forma lo mismo sucede en nuestro caso: la teoría rigurosa de integración en curvas y superficies, o subvariedades en general, es muy complicada y apenas lograremos entreverla en el próximo capítulo; además no nos la preguntarán a este nivel en el examen, pero esto no quiere decir que no podamos entender la idea o hacer cálculos.

Comencemos con una definición que ya nos adelanta que estamos en territorio frecuentado por los físicos.

DEFINICIÓN: *Se llama campo vectorial (continuo) a cualquier función continua* $\mathbf{F} : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Observación: Lo que hace un campo vectorial es asignar a cada punto (de un abierto) de $\mathbb{R}^n$ un vector en dicho espacio, por ello cambiamos ligeramente la notación y escribimos los campos en negrita, como los vectores, aunque sean funciones. Típicamente en Física se tiene $n = 3$. Por ejemplo $\mathbf{F}(x, y, z) = -(x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ es, salvo constantes, el campo gravitatorio generado por una masa en el origen.

Entrando ya en materia, diremos que la integral de línea es el trabajo, y éste para trayectorias rectilíneas es esencialmente la fuerza por el espacio. En general hay que considerar que estas magnitudes son vectoriales y es importante hacia dónde apuntan. Por ejemplo, si para empujar un coche aplicamos una fuerza hacia abajo no avanzará: sólo se aprovecha la componente de la fuerza en la dirección de avance. Por ello,

$$T = (\|\mathbf{F}\| \cos \alpha)\|\mathbf{s}\| \qquad \text{o equivalentemente} \qquad T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}.$$

Toda trayectoria con alguna regularidad, vista con lupa debe ser más o menos lineal, así que para pequeñas variaciones del espacio $\Delta T \approx \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$. Lo cual sugiere denotar el trabajo como

$$T = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

donde C indica el camino recorrido. Si expresamos el espacio en función del tiempo, digamos $\mathbf{s} = \sigma(t)$, $a < t < b$, entonces $\Delta \mathbf{s} \approx \sigma'(t)\Delta t$, con lo cual debiéramos definir la integral anterior de la siguiente forma

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt.}$$

Cuando C es una curva regular y σ es una parametrización (podemos suponer que su dominio es un intervalo porque todo abierto en $\mathbb{R}$ es unión de ellos), esto es lo que llamaremos integral de línea (o circulación) de $\mathbf{F}$ a lo largo de C. Siguiendo la idea física nos centraremos en el caso en que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ ó $\mathbb{R}^2$. Otras notaciones para la integral de línea son $\int_C \mathbf{F}$, $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ y $\int_\sigma \mathbf{F}$.También es común la notación de las formas diferenciales $\int F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ (o $\int F_1 dx + F_2 dy$ en $\mathbb{R}^2$).

Pasemos ahora a las integrales de superficie que nos indican el flujo de un fluido a través de una superficie S, esto es, la cantidad de fluido que la atraviesa por unidad de tiempo. Supongamos que S está parametrizada por $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Si $X(\mathbf{t}) = \mathbf{a}$ con $\mathbf{t} = (u,v)$, entonces al aproximar X por su diferencial, la imagen del rectángulo $[u, u+\Delta u] \times [v, v+\Delta v]$ es aproximadamente el paralelogramo $\mathcal{P} \subset T_{\mathbf{a}}(S)$ generado por los vectores $D_1X(\mathbf{t})\Delta u$ y $D_2X(\mathbf{t})\Delta v$. Llamemos $\mathbf{F}$ al campo de velocidades del fluido, es decir, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es la velocidad de la partícula que está en $\mathbf{x}$. En la unidad de tiempo el fluido que sale por $\mathcal{P}$ determinará una columna con forma de paralelepípedo en la dirección $\mathbf{F}(\mathbf{a})$. Supongamos que la densidad es uno (el caso del agua), entonces la masa de esta columna viene dada, salvo el signo, por el producto mixto

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}) \cdot \big(D_1X(\mathbf{t})\Delta u \times D_2X(\mathbf{t})\Delta v\big) = \mathbf{F}(X(\mathbf{t})) \cdot \big(D_1X(\mathbf{t}) \times D_2X(\mathbf{t})\big)\Delta u \Delta v.$$

Geométricamente $\mathbf{N} = D_1X(\mathbf{t}) \times D_2X(\mathbf{t})$ es la normal en $\mathbf{a}$, que consideraremos la dirección de salida de modo que una "masa negativa" en la operación anterior indica que el fluido entra en vez de salir. Si dividimos Ω en cuadraditos pequeños se tiene en el límite que el flujo es

$$\mathcal{F} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$$

donde debemos definir

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \int_\Omega \mathbf{F}(X(u,v)) \cdot \big(D_1X(u,v) \times D_2X(u,v)\big)\, du\, dv.}$$

Esto es lo que se llama, para superficies regulares $S \subset \mathbb{R}^3$, la <u>integral de superficie</u> (o <u>flujo</u>) de $\mathbf{F}$ en S. Donde $\mathbf{F}$ es un campo vectorial necesariamente en $\mathbb{R}^3$ para que el producto vectorial tenga sentido. Otras notaciones son $\int_S \mathbf{F}$, $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_X \mathbf{F}$.

Por último consideremos un problema físico mucho más sencillo. Supongamos que conocemos la densidad de un cuerpo sólido V y queremos calcular su masa. Si la densidad fuera constante bastaría multiplicar por su volumen. Si es variable podemos pensar que para incrementos pequeños, la masa del cubito $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y] \times [z, z+\Delta z]$ está bien aproximada por $f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z$ donde f es la densidad. Por consiguiente la masa total es

$$\boxed{\int_V f = \int_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

y no necesitamos definiciones adicionales de esta <u>integral de volumen</u> porque es un viejo conocido nuestro.

El último tipo de integral hace honor a su nombre porque si elegimos la densidad

$f = 1$, la masa y el volumen coinciden. Es decir, como sabíamos ya, se define el volumen de V como

$$\boxed{\mathrm{Vol}(V) = \int_V 1.}$$

Las otras integrales se aplican a campos pero aun así admiten interpretaciones geométricas “escalares” análogas.

Si la fuerza es unitaria y paralela al incremento de espacio, entonces el trabajo es la longitud recorrida. Y si el fluido siempre atraviesa perpendicularmente la superficie considerada, el flujo es lo mismo que el área. Por ello es lógico definir la longitud y el área de una curva C y una superficie S, respectivamente, como

$$\boxed{l(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt} \qquad \text{y} \qquad \boxed{A(S) = \int_\Omega \|D_1X(u,v) \times D_2X(u,v)\|\,du\,dv.}$$

En analogía con la integral de volumen, se puede pensar en la masa de curvas y superficies con densidad (lineal y superficial, respectivamente) no constante y dada por una función f. De esta forma se define la <u>integral de una función escalar f a lo largo de C</u> como

$$\boxed{\int_C f = \int_a^b f(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|\,dt.}$$

Y la <u>integral de una función escalar f en S</u> como

$$\boxed{\int_S f = \int_\Omega f(X(u,v))\,\|D_1X(u,v) \times D_2X(u,v)\|\,du\,dv.}$$

Estas integrales son menos importantes que sus análogos vectoriales. De hecho son sólo un caso particular cuando el campo es paralelo a la tangente o la normal.

Antes de pasar a los ejemplos señalaremos algunos problemas teóricos serios que plantean las definiciones de las integrales de línea y superficie que explican las complicaciones, mencionadas al principio de la sección, para hacer una teoría rigurosa de integración en subvariedades.

En primer lugar, no está claro que $\int_C \mathbf{F}$ y $\int_S \mathbf{F}$ no dependan de la parametrización usada (por ello $\int_\sigma \mathbf{F}$ y $\int_X \mathbf{F}$ son notaciones más correctas, aunque menos empleadas). Físicamente, como hemos señalado, el signo del flujo depende de la dirección de la normal que consideremos convencionalmente “de salida” y que puede no coincidir para todas las parametrizaciones con la de $\mathbf{N} = D_1X \times D_2X$, así pues hay una indeterminación de un signo en el flujo. Por lo demás (al menos localmente) no hay dependencia en la parametrización como probaremos en la próxima sección. La misma situación ocurre para las integrales de línea. El trabajo lleva un signo que depende de la dirección en que se recorra la curva, la cual viene dada por la parametrización (por ejemplo, la gravedad nos "regala" trabajo, y un chichón si no nos apartamos, cuando un objeto cae, y nosotros tenemos que "robar" ese mismo trabajo para elevarlo al punto de partida siguiendo la misma trayectoria). La elección de una dirección normal (en las superficies) o de la tangente (en las curvas) se llama orientación (más adelante daremos una definición rigurosa). En la práctica, si la orientación que se requiere no coincide con la correspondiente a nuestra parametrización, simplemente se cambia un signo al resultado.

Un segundo problema más profundo es que típicamente las parametrizaciones son locales: no cubren toda la curva o superficie que parametrizan. Por ejemplo, la parametrización de S^1 dada por $\sigma : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ tiene $S^1 - \{(1,0)\}$ como imagen. Pero en este caso no hay problema porque la imagen difiere de S^1 en un conjunto de "medida unidimensional cero" en el sentido de que da igual integrar en $(0, 2\pi)$ que en $[0, 2\pi]$, y al extender σ a este último intervalo ya se cubre S^1 (y sólo falla la condición de parametrización en los extremos, que "no miden nada"). De la misma forma $X : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $X(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ parametriza S^2 salvo la mitad del "meridiano de *Greenwich*" $y = 0$. Al extenderla a $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ perdemos la inyectividad y la condición $\operatorname{rg} DX = 2$ en un conjunto de medida cero que es indiferente a la hora de integrar.

En los ejemplos prácticos siempre trataremos con curvas y superficies tan sencillas que una parametrización adecuada (o un número finito pequeño de ellas) es suficiente para cubrirlas salvo quizá un conjunto "despreciable". Claramente esto no puede llevarnos a una definición seria de integrales de línea y superficie. Reservaremos esta difícil tarea para el próximo capítulo. Por ahora con la definición provisional poco sólida podemos hacer cálculos sin preocuparnos de su fundamentación teórica. Proceder de otra manera sería como si a nuestro supuesto alumno de clases particulares le enseñásemos la construcción de los números racionales ($\mathbb{Q}$ es el conjunto cociente de cierta relación de equivalencia) antes de explicarle como se suman fracciones.

Por fin veremos unos cuantos ejemplos (hay muchos más en [**Ga-Lo-Ro-Ro-Vi**]). Antes de comenzar insistiremos otra vez en la misma moralina, que cobra todavía más fuerza al no disponer, según nuestras críticas anteriores, de una definición rigurosa completa: incluso si nuestros intereses son estrictamente matemáticos es conveniente saber interpretar las integrales de este capítulo en términos geométricos o físicos porque esto nos ayudará a pensar más deprisa. La siempre mencionada dificultad de las Matemáticas está seguramente en que incluso al tratar con los conceptos más básicos (números o conjuntos) hay que pensar en abstracto, sin imágenes concretas. ¿Por qué no aprovechar uno de los pocos ejemplos en que tenemos tales imágenes, usando la abstracción sólo para dar solidez a nuestras intuiciones?

Veo las líneas trazadas por arquitectos y, a veces, son tan finas como un hilo de araña. Pero los axiomas de las matemáticas son diferentes. No son las imágenes de cosas que entran por los ojos de mi cuerpo. Las conoce quien las reconoce interiormente sin referencia a pensamiento alguno material. De la misma manera puedo percibir los números de que nos servimos para contar las cosas. Pero el principio del número por el que contamos no es lo mismo. No es una imagen de las cosas que contamos, sino algo mucho más sólido. Confesiones. Libro X, 12.

Ejemplo . Calcular

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,y,z)$$

y S es la superficie esférica (centradaen el origen) de radio R con la orientación dada por la normal exterior.

Vamos a ver dos formas de hallar la solución: la primera más o menos mecánica y la segunda más original para ilustrar la importancia antes citada de saber interpretar los problemas. En ambos casos nótese que se puede escribir más brevemente $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$.

Sol.1: Usamos la parametrización natural dada por las coordenadas esféricas con $r = R$, es decir $X(\theta,\phi) = (R\cos\phi \operatorname{sen}\theta, R\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, R\cos\theta)$. Un cálculo prueba que $D_1X \times D_2X$ es

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\phi\,\cos\theta & R\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta & -R\operatorname{sen}\theta \\ -R\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta & R\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = R^2\operatorname{sen}\theta(\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

Es fácil comprobar (elíjase por ejemplo $\theta = \phi = \pi/2$) que la normal es la exterior, como pide el enunciado del problema. Nótese que $\|X(\theta,\phi)\| = R$, porque parametriza a S, con lo cual $\mathbf{F}(X) = X/R^3$ y al sustituir en la fórmula

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{R^3}X(\theta,\phi)\cdot R^2\operatorname{sen}\theta(\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)d\theta\,d\phi,$$

que al hacer los cálculos lleva a

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi = 4\pi.$$

Sol.2: El radiovector de cada punto y la normal son proporcionales en una superficie esférica centrada en el origen, y además $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|^3 = 1/R^2$, por tanto

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \int_S \|\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{N}\| = \frac{1}{R^2}\int_S \|\mathbf{N}\| = \frac{1}{R^2}A(S) = \frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi.$$

Nota: Un físico nos podría decir que $\mathbf{F}$ es salvo constantes el campo gravitatorio de una masa en el origen (o el eléctrico en el caso de una carga estática). Dicho campo se comporta como el de velocidades de un fluido incompresible, de manera que el flujo de la intensidad gravitatoria que sale del origen a través de cualquier superficie cerrada que lo rodee es siempre el mismo. Para probar este resultado, no sólo para esferas, necesitaremos las técnicas del siguiente capítulo.

Ejemplo . Demostrar que si $r = f(\theta)$ define una curva en polares, con $f \in C^1$ y $0 < \theta < 2\pi$, entonces su longitud viene dada por

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, d\theta.$$

La parametrización correspondiente en cartesianas es, gracias a las fórmulas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$,

$$\sigma(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

por tanto

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (f'(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta)^2}\, d\theta.$$

Y después de operar se llega al resultado deseado.

Ejemplo . Calcular la integral de línea de $F(x, y) = (3x^2 + y^2, 2xy)$ a lo largo de S^1 recorrida en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj).

Con la parametrización obvia $\sigma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t)$ se tiene

$$\int_C \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} (3\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t, 2\,\mathrm{sen}\, t\, \cos t)\cdot(-\mathrm{sen}\, t, \cos t)\, dt.$$

Es muy fácil hallar el valor de esta integral haciendo los cálculos, e incluso sin hacerlos notando que el integrando es impar y da lo mismo (por la periodicidad) integrar en $[0, 2\pi]$

que en $[-\pi, \pi]$. En cualquier caso, se obtiene

$$\int_C \mathbf{F} = 0.$$

Ejemplo . Calcular el área (lateral) del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < z < 1$.

Podemos parametrizar esta superficie como

$$X(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r) \qquad \text{con} \qquad 0 < r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Un cálculo prueba

$$D_1X \times D_2X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 1 \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-r\cos\theta, -r\,\mathrm{sen}\,\theta, r).$$

Por tanto

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + r^2}\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \pi\sqrt{2}.$$

A modo de comprobación podemos proceder geométricamente notando que al desarrollar el cono del enunciado sobre el plano (cortándolo por su generatriz) se obtiene un sector circular de radio $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, tal que la longitud de su arco es 2π. Argumentos de geometría elemental prueban que su área es $\pi\sqrt{2}$.

Ejemplo . Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$ a través de la frontera del cubo $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ con la normal interior.

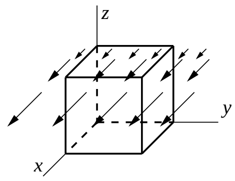
En rigor la frontera S de Q no es una superficie regular sino la unión de las seis superficies formadas por sus caras, y obviamente consideraremos el flujo a través de S como la suma de los flujos a través de las caras. En realidad los cálculos son ridículamente simples si uno visualiza el problema (en otro caso perderá mucho tiempo en parametrizar): a través de las caras con $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$ no puede haber flujo porque el vector $(x^2, 0, 0)$ es perpendicular a la normal. Evidentemente tampoco hay flujo a través de $x = 0$ porque allí $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, Por tanto

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \int_{C_{11}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$$

donde C_{11} es la cara con $x = 1$. Ésta puede ser parametrizada por $X : (u, v) \mapsto (1, u, v)$, lo que implica $\mathbf{N} = D_1X \times D_2X = (1, 0, 0)$ (esto es geométricamente lógico). Al ser la normal opuesta a la que nos indica el enunciado, resulta

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = -\int_0^1\int_0^1 (1,0,0)\cdot(1,0,0)du\,dv = -1.$$

Lo cual, de nuevo, se puede obtener directamente sin más que mirar el dibujo correspondiente.



Ejemplo . En cierto planeta esférico la densidad en cada punto es cuatro veces la distancia al centro. Probar que el cociente entre la masa total y el volumen total es tres veces el radio.

Llamemos R al radio del planeta y V a la esfera (sólida) de radio R. Lo que hay que probar es

$$\int_V \rho = 3R\int_V 1.$$

Escrito en coordenadas cartesianas sustituyendo la densidad,

$$\int_V 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = 3R\int_V dx\,dy\,dz.$$

La segunda integral es simplemente el volumen de la esfera, $4\pi R^3/3$, y la primera se puede calcular notando que la capa esférica entre r y $r+\Delta$ contribuye a la integral aproximadamente con $4r\cdot 4\pi r^2\Delta r$ (se deja al lector justificar esto y completar los detalles). Si estos trucos están fuera de nuestro alcance, siempre se puede pasar a coordenadas esféricas (véase la siguiente sección) obteniendo

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 4r\cdot r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = 3R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

Cuya comprobación se reduce a unos cálculos sencillos.

Ejemplo . Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es siempre un vector unitario apuntando al origen. Calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2=1,\ y>0,\ x>1\}$ recorrida de arriba a abajo.

A cada punto $\mathbf{x}$ le debemos asignar un vector unitario que apunte en la dirección contraria a la de $\mathbf{x}$, por tanto

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y).$$

La forma más lógica de parametrizar C es mediante $\sigma(t) = (1+\cos t, \operatorname{sen} t)$ donde hay que imponer $0 < t < \pi/2$ para que $y > 0$ y $x > 1$. Nótese que con esta parametrización, según avanza t la curva se recorre en el sentido contrario al que nos indica el enunciado, por tanto debemos cambiar el signo:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{t} = -\int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos t, \operatorname{sen} t)}{\sqrt{2+2\cos t}}\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)dt.$$

La integral resulta ser inmediata

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{t} = \int_0^{\pi/2} \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{2+2\cos t}}dt = \sqrt{2+2\cos t}\,\Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{2}-2.$$

4.2. La fórmula de cambio de variable

La Ciencia en su orgulloso, insaciable e inútil afán de abarcarlo todo se inclina en favor de las explicaciones generales más que de los casos particulares. Las Matemáticas ni siquiera tienen que pedir licencia a la realidad para que sus objetos existan, y esa libertad (esencia de las Matemáticas según Cantor) exagera más la tendencia a las fórmulas, definiciones y teorías globales que miran desde lo alto a los diminutos ejemplos. Sin embargo, cuando uno examina la situación críticamente se da cuenta de que son los "trucos" los que resuelven muchos problemas concretos y sobre los que descansan buena parte de esas teorías generales. A veces el círculo se cierra y los trucos están sistematizados en una ley general. Éste es el caso de la fórmula de cambio de variable. ¿No es algo insultantemente truculento que la integral $\int e^{-x^2}dx$ no se pueda calcular con funciones elementales pero que escribiéndola en términos de una integral doble y cambiando de variable se obtenga inmediatamente $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$? (véase el exigente comentario de Lord Kelvin en **[Sp1]** p. 68).

En este curso la fórmula de cambio de variable se usará no sólo como el truco habitual para calcular fácilmente muchas integrales que en coordenadas cartesianas serían muy difíciles, sino también para probar que las integrales definidas en la sección anterior no dependen sensiblemente de la parametrización. Su enunciado es bien conocido del curso pasado.

Teorema 4.1 (fórmula de cambio de variable): *Sea* $g : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g \in C^1$, *una función inyectiva cuyo determinante jacobiano no se anula en* $\mathcal{U}$. *Entonces para cada función integrable* $f : g(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *se cumple*

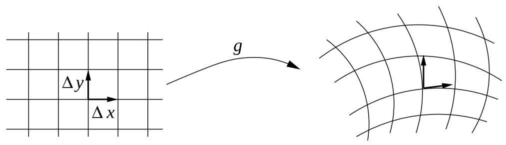
$$\int_{g(\mathcal{U})} f = \int_{\mathcal{U}} (f \circ g)|\det g'|.$$

Observación: Por medio del llamado *teorema de Sard*, la hipótesis de que el jacobiano no se anule se puede suprimir (véase **[Sp1]** p. 66).

Dentro de la filosofía de este curso, la manera natural de probar el resultado anterior es reducirlo al caso en que g es lineal, ya que toda función C^1 se aproxima bien en pequeños entornos por su diferencial. Ésta es la estrategia empleada en **[Ed]** (y en otros textos de la bibliografía como **[Fl]** y **[Ma-Ho]**). Sin embargo también se deben aproximar las imágenes de los dominios de integración, lo que incrementa la miseria de los ϵ. Aquí seguiremos una prueba distinta que oculta parte de lo pequeño y despreciable procediendo por inducción en la dimensión. A pesar de ello la prueba está plagada de sutilezas, quizá más claras después del curso de Teoría de la Medida, que conllevan el poco realista requisito de recordar los recovecos que había detrás de la definición de la integral de Riemann en varias variables (véanse **[Sp1]** y **[Ed]**).

El primer paso es el de la memoria, campo grande y palacio maravilloso, donde se almacenan los tesoros de innumerables y variadísimas imágenes acarreadas por los sentidos. En ella se almacena cuanto pensamos -acrecentando, disminuyendo o variando de cualquier modo, lo adquirido por los sentidos- y cualquier otra cosa confiada a la memoria y que aún no ha sido tragada y sepultada en el olvido. Confesiones. Libro X, 8.

Más importante que seguir los tediosos detalles de la prueba es comprender por qué el teorema es natural.



Para ello nótese que los vectores paralelos a los ejes de longitudes $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ se aplican por g aproximadamente en $D_1 g\, \Delta x_1, \ldots, D_n g\, \Delta x_n$ y la aproximación mejora cuando los incrementos son menores. Con lo cual g transforma en el límite paralelepípedos de volumen $\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$ en paralelepípedos de volumen $|\det g'| \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$, o equivalentemente, el efecto de g es multiplicar la densidad por $|\det g'|$.

Aunque no vamos a aproximar por funciones lineales, en cierto punto compondremos con una de ellas, lo que requerirá un resultado auxiliar en cuya demostración incluiremos varios detalles técnicos de interés.

Lema 4.2 : *Si $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, no singular (un isomorfismo), entonces para cada función integrable $f : g(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n$, se cumple*

$$\int_{g(\mathcal{U})} f = \int_{\mathcal{U}} (f \circ g) |\det A|.$$

<u>Dem.</u>: Con la integral de Riemann, decir que f es integrable en $g(\mathcal{U})$ es lo mismo que decir que la función $\widetilde{f}$ que vale f en $g(\mathcal{U})$ y 0 en su complementario es continua salvo en un conjunto de medida cero (un conjunto que se puede incluir en cubitos cuya suma de volúmenes es tan pequeña como queramos). De aquí, como g es un isomorfismo lineal, es fácil ver que $f \circ g$ es integrable en $\mathcal{U}$. Con la función $\widetilde{f}$ que hemos introducido lo que hay que probar es

$$\int \widetilde{f} = |\det A| \int (\widetilde{f} \circ g)$$

donde las integrales se extienden a $\mathbb{R}^n$. Por definición, $\int \widetilde{f}$ es un límite de integrales de funciones escalonadas (sumas superiores e inferiores) que son constantes en cada cubo de las particiones consideradas. Con ello se puede deducir que basta probar el resultado para la función idénticamente uno cuando sustituimos $g(\mathcal{U})$ por un cubo arbitrario $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ (véase **[Sp1]** y **[Ma-Ho]**), es decir,

$$\int_Q 1 = |\det A| \int_{g^{-1}(Q)} 1. \tag{4.1}$$

El primer miembro es obviamente $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$. Si g es la aplicación lineal que multiplica la coordenada $i-$ésima por λ entonces $|\det A| = \lambda$ y $g^{-1}(Q) = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_i/\lambda, b_i/\lambda] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ con lo cual el segundo miembro coincide con el primero. Y si g es la aplicación lineal que suma la coordenada $j-$ésima a la $i-$ésima dejando el resto invariantes, también coinciden; por ejemplo para $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $i = 1,\ j = 2$ (el caso general es análogo), se tiene

$$\int_{g^{-1}(Q)} 1 = \int_{\{(x+y,y)\in Q\}} 1\, dx\, dy = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1-y}^{b_1-y} 1\, dx\, dy = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Por los argumentos citados anteriormente, una vez comprobado que (4.1) se cumple para estas aplicaciones en cubos, se sigue para ellas en cualquier dominio en donde la fórmula tenga sentido.

Un resultado bien conocido de álgebra lineal (en realidad no es más que el método de eliminación de Gauss) afirma que toda matriz no singular es un producto de matrices, llamadas elementales, correspondientes a aplicaciones lineales de los dos tipos antes indicados. Digamos en nuestro caso $A = E_1 E_2 \dots E_m$ y escribamos $g_i(\mathbf{x}) = E_1 E_2 \dots E_i \mathbf{x}$. Iterando

$$\int_Q 1 = |\det E_1| \int_{g_1^{-1}(Q)} 1 = |\det E_1||\det E_2| \int_{g_2^{-1}(Q)} 1 = \dots = |\det E_1| \dots |\det E_m| \int_{g^{-1}(Q)} 1$$

y (4.1) se sigue empleando que el producto de determinantes es el determinante del producto. ∎

<u>Dem.(del teorema)</u>: De nuevo hay que comenzar con unos detalles, en este caso topológicos, que seguramente son poco asequibles a este nivel.

Consideremos un cubo (cerrado) $Q \subset \mathcal{U}$ y para cada punto $\mathbf{a} \in Q$ un entorno $\mathcal{U}_\mathbf{a} \subset \mathcal{U}$. A base de hacer una partición suficientemente fina de Q en subcubos, podemos conseguir que cada uno de ellos esté totalmente contenido en algún $\mathcal{U}_\mathbf{a}$. En otro caso tomando puntos de los subcubos que no están totalmente cubiertos, según hagamos la partición más fina tendremos una sucesión acotada sin una subsucesión convergente, lo que contradice la compacidad de Q. (Para los que conozcan un poco la topología, lo que hemos hecho es la prueba de la existencia del número de Lebesgue).

De la observación anterior se deduce que basta probar que cada $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ tiene un entorno $\mathcal{U}_\mathbf{a}$ tal que el teorema es cierto para cada cubo dentro de él. Éste es el resultado que probaremos por inducción.

Si $n = 1$, es una simple consecuencia de

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ g)(t)\,g'(t)\,dt \qquad \text{para } g \in C^1 \text{ con } g'(t) \neq 0,$$

que se prueba en un primer curso de cálculo (véase **[Sp2]**).

Ahora hay que demostrar que si se cumple para $n-1$ también se cumple para n. Para ello consideremos la aplicación lineal $\alpha(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{a})\mathbf{x}$ y las funciones

$$\widetilde{g} = \alpha^{-1} \circ g, \qquad \gamma(\mathbf{x}) = (\widetilde{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \widetilde{g}_{n-1}(\mathbf{x}), x_n), \qquad \beta(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, (\widetilde{g}_n \circ G)(\mathbf{x}))$$

donde G es una inversa local de γ, la cual existe en un entorno $\mathcal{U}_{\mathbf{a}}$ de $\mathbf{a}$ gracias al teorema de la función inversa, ya que $D\widetilde{g}(\mathbf{a}) = \text{Id}$ y por tanto $D\gamma(\mathbf{a}) = \text{Id}$. Tomando $\mathcal{U}_{\mathbf{a}}$ suficientemente pequeño se tiene que β también es inyectiva e invertible, con inversa C^1, en el abierto $\gamma(\mathcal{U}_{\mathbf{a}})$ porque $D\beta(\mathbf{a})$ también es la identidad. Si probamos el resultado para α, β y γ entonces se cumplirá para g, ya que evidentementemente $g = \alpha \circ \beta \circ \gamma$ y para $Q \subset \mathcal{U}_{\mathbf{a}}$

$$\int_{g(Q)} f = \int_{(\beta\circ\gamma)(Q)} (f \circ \alpha)|\det \alpha'| = \int_{\gamma(Q)} (f \circ \alpha \circ \beta)|\det \alpha'||\det \beta'| = \int_Q (f \circ g)|\det g'|.$$

(Nótese que el hecho de que $\gamma(Q)$, $(\beta \circ \gamma)(Q)$ y $g(Q)$ no sean cubos, es irrelevante considerando particiones suficientemente finas. Recuérdese que γ, $\beta \circ \gamma$ y g son C^1 con inversa C^1 en $\mathcal{U}_{\mathbf{a}} \supset Q$).

El resultado para α se sigue del lema anterior. Además, por las explicaciones dadas en su demostración podemos restringir la prueba para β y γ al caso en que la función a integrar es idénticamente uno y el dominio es un cubo. Es decir, hay que probar a partir de la hipótesis de inducción, que

$$\int_{\beta(Q)} 1 = \int_Q |\det \beta'| \qquad \text{y} \qquad \int_{\gamma(Q)} 1 = \int_Q |\det \gamma'|$$

para cubos $n-$dimensionales Q suficientemente pequeños (concrementamente, $Q \subset \gamma(\mathcal{U}_{\mathbf{a}})$ en el primer caso y $Q \subset \mathcal{U}_{\mathbf{a}}$ en el segundo).

Para $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ se tiene

$$\int_{\beta(Q)} 1 = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{(\widetilde{g}_n \circ G)(x_1,\ldots,x_{n-1},a_n)}^{(\widetilde{g}_n \circ G)(x_1,\ldots,x_{n-1},b_n)} 1\, dx_n\, dx_{n-1} \ldots dx_1.$$

Del caso de dimensión uno de la fórmula de cambio de variable, se sigue

$$\int_{\beta(Q)} 1 = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{a_n}^{b_n} |D_n(\widetilde{g}_n \circ G)(\mathbf{x})|\, dx_n\, dx_{n-1} \ldots dx_1 = \int_Q |\det \beta'|.$$

Por otra parte, si $Q_{n-1} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$, entonces

$$\int_{\gamma(Q)} 1 = \int_{a_n}^{b_n} \Big(\int_{\gamma_{n-1}(Q_{n-1})} 1\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \Big) dx_n$$

con γ_{n-1} la función que una vez fijado x_n asigna el valor de $(\widetilde{g}_1(\mathbf{x}),\dots,\widetilde{g}_{n-1}(\mathbf{x}))$ a cada $(x_1,\dots,x_{n-1})$. A la integral anterior se le puede aplicar la hipótesis de inducción, y notando que $\det\gamma'_{n-1}=\det\gamma$ se deduce

$$\int_{\gamma(Q)} 1 = \int_{a_n}^{b_n}\Big(\int_{Q_{n-1}} |\det\gamma'_{n-1}|\,dx_1\,dx_2\dots\,dx_{n-1}\Big)dx_n = \int_Q |\det\gamma'|,$$

lo que concluye la prueba. ■

Ejemplo . Calcular el volumen de la esfera de radio R.

Según la definición hay que integrar la función idénticamente uno en

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=R^2\}.$$

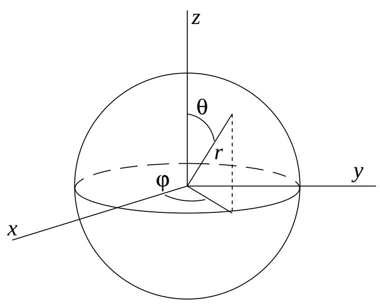
Esto llevaría a la integral

$$\mathrm{Vol}(V)=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx$$

que es demasiado complicada. Si utilizamos coordenadas esféricas

$$x=r\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta,\qquad y=r\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta,\qquad z=r\cos\theta,$$

entonces la esfera V (salvo un conjunto de volumen cero) queda determinada por $0<r<R$, $0<\phi<2\pi$, $0<\theta<\pi$. El cambio es inyectivo y tiene jacobiano no nulo, $r^2\operatorname{sen}\theta$, con lo cual entra dentro de las hipótesis del teorema.



Con estas nuevas variables la integral se vuelve sencillísima.

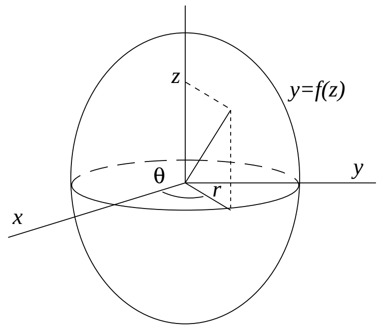
$$\mathrm{Vol}(V)=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\operatorname{sen}\theta\,d\phi\,d\theta\,dr=\frac{4\pi}{3}R^3.$$

Ejemplo . Calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar la curva $y=f(z)$, $x=0$, $a<z<b$, alrededor del eje Z.

Lo más natural es emplear coordenadas cilíndricas (como las polares pero con una coordenada más)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad z = z.$$

Esta transformación tiene jacobiano r.



En nuestro caso $0 < r < f(z)$, $0 < \theta < 2\pi$, $a < z < b$; de modo que

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} r\, dr\, d\theta\, dz = \pi \int_a^b \big(f(z)\big)^2 dz.$$

Cambiando z por x, ésta es la bien conocida fórmula de cálculo de una variable para hallar el volumen generado cuando la gráfica de $y = f(x)$ gira alrededor del eje X en el intervalo $[a, b]$. En el caso de la semicircunferencia de radio R, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, se obtiene una vez más el volumen de la esfera

$$\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

En definitiva, podemos hallar el volumen de la esfera con los ingeniosísimos argumentos de Arquímedes o empleando coordenadas esféricas o cilíndricas pero el resultado siempre será el mismo y la única (e importante) diferencia es el trabajo que nos cueste llegar hasta él. En esto radica la perfección o exactitud o aburrimiento (dependiendo de quién lo diga) de las Matemáticas.

> *Hay conocimientos ciertos y sólidos sobre estas cosas que no aumentan con el paso de las generaciones, como las luces de la sabiduría y de la ciencia. Pero las operaciones de estas mismas verdades en el orden material son numerosas y variadas.* Confesiones. Libro XIII, 20.

En lo que resta de sección vamos a deducir del teorema anterior que las integrales de líneas y superficie no dependen (esencialmente) de la parametrización escogida. Antes de nada introduciremos un poco de notación.

DEFINICIÓN: *Sean* $X : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $\widetilde{X} : \widetilde{\mathcal{V}} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ *parametrizaciones locales. Se dice que* $\widetilde{X}$ *es una* <u>*reparametrización*</u> *de* X *si existe un difeomorfismo (función* C^1 *con inversa* C^1*)* $\phi : \widetilde{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{V}$ *tal que* $\widetilde{X} = X \circ \phi$.

Una observación importante es que si dos parametrizaciones locales $X : \mathcal{V} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $\widetilde{X} : \widetilde{\mathcal{V}} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, tienen la misma imagen, $X(\mathcal{V}) = \widetilde{X}(\widetilde{\mathcal{V}})$, entonces necesariamente una es reparametrización de la otra. Para comprobarlo basta tomar $\phi = X^{-1} \circ \widetilde{X}$ donde X^{-1} indica la inversa de la restricción $X : \mathcal{V} \longrightarrow X(\mathcal{V})$. Es obvio que ϕ así definida es biyectiva y por tanto invertible. Para probar que $\phi \in C^1$, se puede proceder como en la última parte de la prueba de las definiciones equivalentes de subvariedad, considerando en cada entorno un difeomorfismo sobre su imagen $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ tal que la proyección p_n sobre las n primeras coordenadas aplicada a F coincida con X^{-1} para puntos de la subvariedad. Por la regla de la cadena $\phi = p_n \circ F \circ \widetilde{X}$ es C^1. De la misma forma se prueba que $\phi^{-1} = \widetilde{X}^{-1} \circ X$ también lo es.

Para poder escribir el teorema correspondiente de forma más limpia, haremos un poco más restrictiva la relación de equivalencia *ser parametrización de*, añadiéndole un apellido.

DEFINICIÓN: *Se dice que una reparametrización* $\widetilde{X} = X \circ \phi$ <u>*conserva la orientación*</u> *si* $\det \phi' > 0$ *en todos los puntos del dominio de* ϕ.

Teorema 4.3: *Sean* σ *y* $\widetilde{\sigma}$ *parametrizaciones locales de una curva regular y* X *y* $\widetilde{X}$ *parametrizaciones locales de una superficie regular en* $\mathbb{R}^3$. *Si* $\widetilde{\sigma}$ *y* $\widetilde{X}$ *son, respectivamente, reparametrizaciones de* σ *y* X *que conservan la orientación, entonces*

$$\int_\sigma \mathbf{F} = \int_{\widetilde{\sigma}} \mathbf{F} \qquad y \qquad \int_X \mathbf{F} = \int_{\widetilde{X}} \mathbf{F}.$$

<u>DEM.</u>: El resultado para curvas se sigue de la definición de integral de línea y de la fórmula de cambio de variable en dimensión uno (nótese que ϕ es una función real y el jacobiano es la derivada usual):

$$\int_{\widetilde{\sigma}} \mathbf{F} = \int (\mathbf{F} \circ \widetilde{\sigma}) \cdot \widetilde{\sigma}' = \int \big((\mathbf{F} \circ \sigma) \circ \phi\big) \cdot (\sigma' \circ \phi)\, \phi' = \int (\mathbf{F} \circ \sigma) \cdot \sigma' = \int_\sigma \mathbf{F}.$$

El caso de superficies se deduce de la fórmula de cambio de variable en dimensión dos pero requiere explicaciones adicionales. Para simplificarlas llamaremos provisionalmente $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ a las columnas de $X' \circ \phi$, esto es, $\mathbf{v} = D_1 X \circ \phi$, $\mathbf{w} = D_2 X \circ \phi$, y denotaremos mediante a_{ij}, $1 \le i, j \le 2$, a los elementos de la matriz ϕ'. Con esta notación la primera columna de $(X' \circ \phi)\, \phi'$ es $a_{11}\mathbf{v} + a_{21}\mathbf{w}$ mientras que la segunda es $a_{21}\mathbf{v} + a_{22}\mathbf{w}$. Por consiguiente el producto vectorial de las dos columnas es

$$(a_{11}\mathbf{v} + a_{21}\mathbf{w}) \times (a_{21}\mathbf{v} + a_{22}\mathbf{w}) = a_{11}a_{22}\mathbf{v} \times \mathbf{w} + a_{21}a_{12}\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Volviendo al lenguaje de las parametrizaciones, según la regla de la cadena $D_1(X \circ \phi)$ y $D_2(X \circ \phi)$ son la primera y la segunda columnas de $(X' \circ \phi)\,\phi'$; así que lo que hemos probado es que el producto vectorial $D_1(X \circ \phi) \times D_2(X \circ \phi)$ coincide con $\det \phi'(D_1X \circ \phi) \times (D_2X \circ \phi)$. Con ello podemos proceder como antes

$$\int_{\widetilde{X}} \mathbf{F} = \int (\mathbf{F} \circ \widetilde{X}) \cdot (D_1\widetilde{X} \times D_2\widetilde{X}) = \int \big((\mathbf{F} \circ X) \circ \phi\big) \cdot \big(D_1(X \circ \phi) \times D_2(X \circ \phi)\big)$$

$$= \int \big((\mathbf{F} \circ X) \circ \phi\big) \cdot (D_1X \times D_2X) \circ \phi \,\det \phi' = \int (\mathbf{F} \circ X) \cdot (D_1X \times D_2X) = \int_X \mathbf{F},$$

como queríamos demostrar. ■

Nótese que en la demostración anterior $\det \phi'$ multiplica a la tangente o a la normal, con lo cual conservar la orientación corresponde a no modificar la dirección en la que apuntan estos vectores.

¿Qué ocurre si una reparametrización no conserva la orientación? Si $\det \phi'$ en lugar de ser positivo es negativo entonces debemos cambiar los signos en el teorema anterior de forma que

$$\int_\sigma \mathbf{F} = -\int_{\widetilde{\sigma}} \mathbf{F} \qquad \text{y} \qquad \int_X \mathbf{F} = -\int_{\widetilde{X}} \mathbf{F}.$$

Si el dominio en el que están definidas las parametrizaciones es “de una pieza” (conexo, para hablar con rigor topológico) en el sentido de que cada par de puntos se pueda conectar mediante un *camino* continuo, necesariamente $\det \phi'$ es siempre positivo o siempre negativo, ya que si cambiara de signo debería anularse en algún punto y ϕ no sería difeomorfismo. Sin embargo podríamos considerar dominios raros que estén formados por varios abiertos disjuntos de manera que en unos el signo sea positivo y en otros negativo y no haya una relación clara entre las integrales obtenidas al reparametrizar pero esto es demasiado artifical.

4.3. La notación de las formas diferenciales

Los tres tipos de integrales que hemos introducido en este capítulo responden a ideas físicas bien diferentes. En esta sección veremos que con la notación adecuada todas ellas son caras de la misma moneda (o, siendo tres, lados del mismo triángulo equilátero). Es justo señalar que lo que aquí estudiaremos como simple notación conveniente para efectuar la *unificación* de nuestras integrales, es un instrumento matemático mucho más complejo y profundo que establece sorprendentes lazos entre diversas áreas como la geometría diferencial y la topología algebraica, alcanzando a otras que aparentemente no tienen que ver con el mundo continuo (por ahora, demostrar el último teorema de Fermat pasa por entender las formas modulares, que son formas diferenciales en ciertas superficies complejas).

Seguramente son cosas como éstas las que hacen hablar a Sir Michael F. Atiyah de la *unidad de las Matemáticas* (véanse sus “Collected works” p. 277). Aunque haya que ser medalla Field para comprender que la misma idea está tras de la cinta de Möbius y de la falta de factorización única, un estudiante debería poder atisbar (a pesar de la común indolencia de los profesores en este aspecto) que lo que le cuentan a primera hora tiene que ver con lo que le cuentan a última,

Recordemos la definición de la integral de línea de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$, a lo largo de una curva C parametrizada por $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Desconsiderando el posible signo debido a la orientación

$$\int_C \mathbf{F} = \int (F_1 \circ \sigma)\, \sigma_1' + \int (F_2 \circ \sigma)\, \sigma_2'.$$

Nótese que σ_1' y σ_2' son la primera y la segunda filas de la matriz jacobiana de σ.

En una superficie S parametrizada por X, la normal es $\mathbf{N} = D_1X \times D_2X$, de donde, salvo orientaciones, la integral de superficie se puede escribir como

$$\int_S \mathbf{F} = \int (F_1 \circ X) \begin{vmatrix} D_1X_2 & D_2X_2 \\ D_1X_3 & D_2X_3 \end{vmatrix} + \int (F_2 \circ X) \begin{vmatrix} D_1X_3 & D_2X_3 \\ D_1X_1 & D_2X_1 \end{vmatrix} + \int (F_3 \circ X) \begin{vmatrix} D_1X_1 & D_2X_1 \\ D_1X_2 & D_2X_2 \end{vmatrix}.$$

En este caso los determinantes son respectivamente los menores formados por las filas segunda y tercera, tercera y primera, y primera y segunda de la matriz jacobiana de la parametrización.

Por último, consideremos la integral de volumen en $\mathbb{R}^3$. Podemos entender que una parametrización de la región correspondiente es un cambio de las coordenadas usuales (x, y, z) a otras. Si nos despreocupamos del signo del jacobiano en la fórmula del cambio de variable (lo suponemos positivo), se tiene

$$\int_M f = \int (f \circ g) \det g'.$$

En analogía con lo anterior, el jacobiano $\det g'$ es el menor formado por las filas primera, segunda y tercera (esto es, por todas las filas) de la matriz jacobiana.

Según hemos comprobado, todas las integrales responden al mismo esquema: para integrar sobre algo de dimensión n se multiplican las componentes compuestas con las parametrización por los menores de orden n de la jacobiana de dicha parametrización. Esto nos permite dar una definición puramente notacional de las formas diferenciales y sus integrales.

Insistimos en que lo que veremos no es la definición "buena" que aparece en los libros avanzados. De alguna forma vamos a establecer un álgebra de lo que antes se llamarían infinitésimos. El profesor del curso pasado nos podría decir que el diferencial dx no significa nada, porque el análisis clásico moderno se ha librado de las cantidades infinitamente pequeñas, mientras que el profesor del último curso nos podría decir, si llegase hasta ahí el temario, que todos los diferenciales generalizados que vamos a definir ahora no son más que los tensores covariantes alternados en una variedad. Como ninguna de estas dos explicaciones nos satisface, nos quedaremos aquí entre dos aguas con una definición que permita manipular diferenciales sin entrar en su significado profundo. Incluso aunque estudiásemos esta especie de infinitésimos ennoblecidos en libros avanzados, seguramente con poco éxito, para hacer cálculos sólo tendríamos que saber lo que veremos aquí.

> *Esto me hacía suspirar por ellos como si se tratara de un misterio divinamente maravilloso. Traté de leerlos y entenderlos por mí mismo, pero me pregunto ahora qué ventaja saqué de todo ello. Hablando con otros, me dijeron que apenas si habían logrado entenderlos, después de que muy esclarecidos maestros no sólo se los explicaran sino que además se lo ilustraran con diagramas en la arena. Al discutir con ellos me di cuenta que no me podían decir mucho más de lo que yo había descubierto ya leyéndolo por mi cuenta.* Confesiones. Libro IV, 16.

Llamaremos <u>forma diferencial de orden n</u> o <u>$n-$forma</u> en $\mathbb{R}^{n+k}$ a una expresión formal del tipo

$$\omega = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{n} f_{i_1 i_2 \dots i_n} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

con $f_{i_1 i_2 \dots i_n} : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones C^1.

Además dada una subvariedad $n-$dimensional $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, digamos parametrizada por X, definimos la integral de la $n-$forma ω sobre M como

$$\int_M \omega = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} \int \big(f_{i_1 i_2 \dots i_n} \circ X\big) \det X'_{\mathbf{i}}$$

donde $\det X'_{\mathbf{i}}$ indica el menor formado por las filas $i_1, i_2, \dots, i_n$ de la matriz jacobiana. Por convenio se dice que las $0-$formas son las funciones $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ y que su integral sobre la variedad 0-dimensional dada por un punto es su valor en dicho punto.

Por las propiedades de los determinantes, las formas diferenciales se comportan bajo la integral de manera antisimétrica frente al intercambio de dos variables. Por ejemplo $\int dx \wedge dy \wedge dz = -\int dy \wedge dx \wedge dz$ y $\int dx \wedge dx = \int 0 = 0$. Escribiendo estas propiedades sin ninguna referencia a la integral, en nuestro ejemplo $dx \wedge dy \wedge dz = -dy \wedge dx \wedge dz$ y $dx \wedge dx = 0$, podemos agrupar muchas veces términos en una forma diferencial sumando coeficientes. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\omega &= 3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 5dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 + 5dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \\ &= 3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 0 - 5dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 = 3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 5dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &= 3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - 5dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = -2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

Es decir, en realidad estamos definiendo una forma diferencial como una expresión formal en la que nos permitimos hacer manipulaciones de este tipo.

Observación: Al igual que con las integrales de línea y de superficie, la integral $\int_M \omega$ sólo está bien definida una vez que hemos especificado una orientación. Con esta salvedad, de nuevo, $\int_M \omega$ no depende de la parametrización. De alguna forma la clave de la importancia de las formas diferenciales es que son *lo que se puede integrar* en una subvariedad, sin importarnos las coordenadas elegidas.

Tras estas definiciones ya estamos preparados para unificar los tres tipos de integrales.

Con la notación de las formas diferenciales, se tiene que las integrales de línea son

$$\int_C \mathbf{F} = \int_C \omega \quad \text{con} \quad \omega = F_1 dx + F_2 dy \;\; (\text{en } \mathbb{R}^2) \;\; \text{o} \;\; \omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \;\; (\text{en } \mathbb{R}^3).$$

Las de superficie son

$$\int_S \mathbf{F} = \int_S \omega \qquad \text{con} \qquad \omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy.$$

Y finalmente, si el jacobiano es positivo se tiene para las integrales de volumen

$$\int_V f = \int_V \omega \qquad \text{con} \qquad f = dx \wedge dy \wedge dz.$$

La condición del jacobiano positivo viene motivada por nuestra identificación de $\int_V f$ con la masa cuando la densidad es f, pero si viviéramos en $\mathbb{R}^4$ podríamos ver con nuestros ojos cuatridimensionales dos orientaciones en V y cada uno de los signos cobraría sentido.

En $\mathbb{R}^3$ las formas de orden 1 son todas del tipo $a\,dx + b\,dy + c\,dz$, las de orden 2, $a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy$ (recuérdese que por ejemplo $dz \wedge dy = -dy \wedge dz$, etc.) y las de orden 3, $a\,dx \wedge dy \wedge dz$. Con lo cual sólo hay tres tipos de integrales en $\mathbb{R}^3$, las dos primeras se aplican a campos vectoriales $\mathbf{F} = (a, b, c)$ y la última a funciones escalares. Esto es una interesante casualidad que deja de cumplirse en dimensiones superiores, por ejemplo en $\mathbb{R}^4$ hay cuatro tipos de integrales (todavía relevantes físicamente por la relatividad) y la correspondiente a las $2-$formas requiere seis funciones, esto es, no se aplica a campos vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

Por si todo esto fuera poco, vamos a rizar el rizo hallando diferenciales de formas diferenciales.

Dada una $0-$forma $\omega = f$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definimos su <u>diferencial</u> como la $1-$forma

$$d\omega = D_1 f\, dx_1 + D_2 f\, dx_2 + \ldots + D_m f\, dx_m$$

y, en general, dada una $n-$ forma $\omega = \sum f_{i_1 i_2 \ldots i_n} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$ se define inductivamente su <u>diferencial</u> como la $(n+1)-$forma

$$d\omega = \sum df_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n},$$

donde se aplica la distributiva después de sustituir $df_{i_1 i_2 \ldots i_n}$.

El siguiente ejemplo será muy relevante para entender el significado único de los teoremas de Green, Stokes y Gauss del siguiente capítulo.

<u>Ejemplo</u> . Dadas $\omega_1 = Pdx + Qdy$ en $\mathbb{R}^2$, $\omega_2 = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ en $\mathbb{R}^3$ y $\omega_3 = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$ en $\mathbb{R}^3$, calcular sus diferenciales.

Según la definición

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \big(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\big) \wedge dx + \big(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\big) \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \boxed{\big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\big) dx \wedge dy} \quad . \end{aligned}$$

Ahora ya entendemos el truco, no hace falta escribir las derivadas de las variables que ya tenemos porque $dx_i \wedge dx_i = 0$, y si para agrupar términos debemos intercambiar variables, cambiamos el signo. El cálculo para ω_2 es

$$
\begin{aligned}
d\omega_2 &= \big(\frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz\big) \wedge dx + \big(\frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz\big) \wedge dy + \big(\frac{\partial F_3}{\partial x}dx + \frac{\partial F_3}{\partial y}dy\big) \wedge dz \\
&= \boxed{(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})dx \wedge dy} \quad .
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
d\omega_3 &= \frac{\partial F_1}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial F_3}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy \\
&= \boxed{(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz} \quad .
\end{aligned}
$$

Donde hemos usado varias veces la antisimetría al intercambiar variables, por ejemplo $dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

Longitudes y sombras

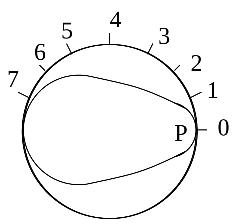
Material:

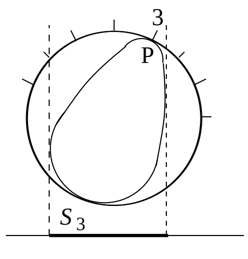
- Un compás.
- Cartulina.
- Una hoja de papel milimetrado.

Objetivos: Comprobar experimental y teóricamente una fórmula integral para hallar la longitud de una curva cerrada convexa.

El experimento: Dibujemos en la cartulina una región convexa con frontera lo más suave posible (sin picos ni grandes cambios en la curvatura), para ello puede ser conveniente usar el compás enlazando varios arcos de circunferencia. La región, una vez recortada, debe caber en cualquier posición en la hoja de papel milimetrado. La longitud de la frontera puede hallarse analíticamente con gran precisión si está formada por arcos de circunferencia. En cualquier caso siempre se puede calcular haciendo rodar la región sobre el papel milimetrado y midiendo el espacio recorrido. En un experimento con una región ovoidal las longitudes halladas por ambos métodos diferían en menos de un milímetro, siendo aproximadamente de $33'8\,cm$.

Con la punta del compás taladraremos la región por un punto interior pinchándola en el papel milimetrado de manera que pueda girar. Tracemos una circunferencia ajustando la abertura del compás de manera que sea tangente a la región en cierto punto P. Después dividamos la circunferencia en cierto número par no muy pequeño de partes; digamos 16 (esto es muy fácil con el compás), señalando la primera mitad de ellas, en nuestro caso las correspondiente a los ángulos $2\pi \cdot 0/16$, $2\pi \cdot 1/16$, $2\pi \cdot 2/16$,..., $2\pi \cdot 7/16$.





Haciendo coincidir P con la $i-$ésima división señalada, calcularemos la longitud s_i de la proyección ortogonal (la "sombra") sobre alguna recta horizontal prefijada. Esto es realmente sencillo a simple vista sin más que mirar las divisiones del papel milimetrado. Finalmente, si calculamos la media de los s_i y la multiplicamos por π, obtendremos una aproximación increíblemente buena de la longitud de la frontera de la región considerada. Por ejemplo, en el ejemplo antes mencionado se obtuvo

$$s_0 = 13\,cm, \quad s_1 = s_2 = 12'6\,cm, \quad s_2 = s_6 = 11\,cm, \quad s_3 = s_5 = 9\,cm, \quad s_4 = 8'3\,cm.$$

Con lo cual la aproximación de la longitud es $\pi \cdot 86'5/8 = 33'9\ldots$ Como hemos señalado el valor considerado correcto es $33'8\,cm$.

La explicación: Llamemos $s(\alpha)$ a la longitud de la "sombra" que se obtiene tras inclinar la región considerada un ángulo α. La fórmula que explica la experiencia anterior es

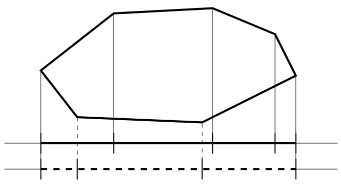
$$l = \int_0^{\pi} s(\alpha)d\alpha. \tag{4.2}$$

Nótese que lo único que hemos hecho en el experimento es aproximar la integral por la "suma de Riemann" $\frac{\pi}{N}\big(s(0) + s(\frac{\pi}{N}) + s(\frac{2\pi}{N}) + \ldots + s(\frac{(N-1)\pi}{N})\big)$.

Para justificar la fórmula (4.2) consideremos primero un vector genérico de norma R partiendo del origen $\mathbf{v} = R(\cos\beta_0, \operatorname{sen}\beta_0)$. Cuando lo giramos un ángulo α la "sombra" que proyecta sobre la horizontal medirá $R|\cos(\beta_0 + \alpha)|$. La función $y(x) = |\cos(\beta_0 + x)|$ tiene periodo π, así que da igual integrarla en $[0, \pi]$ que en $[-\beta_0, \pi - \beta_0]$, con lo cual

$$\int_0^{\pi} R|\cos(\beta_0 + \alpha)|\,d\alpha = R\int_{-\beta_0}^{\pi-\beta_0} |\cos(\beta_0 + \alpha)|\,d\alpha = R\int_0^{\pi} |\cos t|\,dt = 2R.$$

De aquí se deduce que para un segmento $\int_0^{\pi} s(\alpha)d\alpha$ coincide con el doble de su longitud. Ciertamente el resultado no depende de que el segmento esté situado en el origen. Si ahora unimos varios de estos segmentos para formar un polígono convexo, las "sombras" se concatenan excepto que las correspondientes a los segmentos de la parte de abajo se sobreponen a las de los segmentos de la parte de abajo. Consecuentemente hay que introducir un factor $1/2$ cuando se aplica el cálculo anterior, lo que prueba (4.2) para un polígono convexo.



La longitud de una curva regular se puede aproximar tanto como se desee por la de una línea poligonal suficientemente cercana, de hecho ésta es la manera en la que se deduce la fórmula $l = \int \|\sigma'(t)\|\,dt$. Por tanto, si (4.2) se cumple para cualquier polígono convexo, también es válida cualquiera que sea la región convexa con frontera regular que se haya elegido.

¡Eureka!

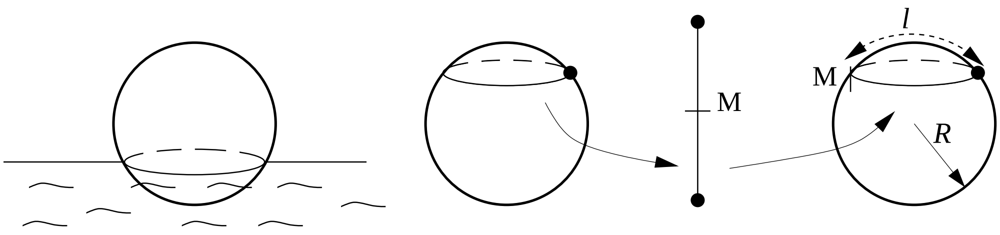
Material:

- Una pelota pequeña.
- Un cazo con agua.
- Una regla.
- Un cordel.
- Un rotulador.
- Un peso de cocina.
- Un calibre o nonio (no es imprescindible).

Objetivos: Comprobar experimentalmente el principio de Arquímedes y mostrar su relación con las integrales de superficie y de volumen.

El experimento: Dejemos la pelota en el cazo de agua y marquemos la línea de flotación con el rotulador (para ello será conveniente sujetar la pelota con la mano sin hundirla y quizá marcar sólo algunos puntos que pueden unirse más fácilmente con ella fuera del agua).

En la circunferencia que conforma el paralelo determinado por la línea de flotación marquemos dos puntos diametralmente opuestos. Para ello podemos simplemente extender el cordel sobre ella, desenrollarlo, marcar el punto medio y volverlo a enrollar.



Entre estos dos puntos situemos el cordel lo más tenso posible de manera que describa un arco de meridiano que pasa por la parte antes sumergida y midámoslo. Midamos también el radio de la pelota (con el nonio esto es trivial, también se puede utilizar el cordel y a partir de la longitud del meridiano hallar el radio). Los valores para la longitud de arco y el radio correspondientes a un experimento real* fueron $l = 8'9\, cm$ y $R = 2'8\, cm$.

* *N. del A.* Empleé una pelota de goma, parecida a las que se le suelen dar a los perros, algo menor que una de tenis. Marcar la línea de flotación fue más dificultoso de lo previsto. Señalé algunos puntos y si al volver a poner la pelota en el cazo no quedaban a ras de agua los corregía. Después completé aproximadamente la circunferencia ayudándome de un papel puesto a modo de cucurucho.

Apliquemos ahora la fórmula

$$\frac{4\pi}{3}R^3\big(3-2\operatorname{sen}^2\frac{l}{4R}\big)\operatorname{sen}^4\frac{l}{4R} \tag{4.3}$$

con l y R en centímetros (que con los datos citados resulta $47'25$). Podemos comprobar utilizando el peso de cocina que esto coincide con bastante precisión con el peso de la pelota en gramos (en nuestro caso $\approx 45\,gr$). Es decir, podemos saber cuánto pesa una bola ligera sin más que examinar cuánto flota.

La explicación: Obviamente el principio de Arquímedes (*todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen que desaloja*) explica la experiencia anterior. Como el empuje debe compensar el peso de la pelota y el "líquido desalojado" es el agua, cuya masa y volumen coinciden, basta comprobar que la fórmula (4.3) es el volumen de la parte sumergida. Para ello se puede integrar la función idénticamente uno en la región correspondiente (llamada segmento esférico), y después de unos cálculos más o menos tediosos se llega a (4.3).

Lo que haremos aquí es utilizar ideas básicas previas (conceptual pero no históricamente) al principio de Arquímedes, que nos llevarán a expresar el empuje como una integral de superficie que será muy fácil de calcular.

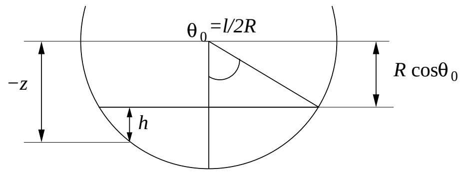
Imaginemos un pequeño cuadradito de área A paralelo a la superficie del agua y situado a una profundidad h. El peso del agua encima de él será $mg = Ahg$ (densidad$=1$ $\Rightarrow$ masa$=$volumen$=$ Ah). Si pudiéramos quitar repentinamente toda esa columna de agua, por acción y reacción la que está debajo saltaría hacia arriba con una fuerza Ahg. Es decir, a profundidad h hay una fuerza por unidad de superficie ("presión vectorial") dada por

$$\mathbf{P} = (0,0,hg).$$

Normalmente esta fuerza está compensada con el peso del agua que está por encima, y en nuestro experimento por el peso de la pelota. En este último caso hay que tener en cuenta que $\mathbf{P}$ actúa sobre una superficie curva donde la profundidad y la dirección en la que se aplica la fuerza va cambiando de punto a punto. Por ello, la fuerza total es la integral de $\mathbf{P}$ en la superficie sumergida, S, y debe compensarse con el peso mg de la pelota. En definitiva, con la orientación usual

$$mg + \int_S \mathbf{P} = 0. \tag{4.4}$$

Para calcular la integral conviene parametrizar usando los ángulos en esféricas $X(\theta,\phi) = R(\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ donde $0\le\phi\le 2\pi$ y $\pi - 0'5\,l/R \le \theta \le \pi$ (recuérdese que en radianes ángulo$=$ longitud/radio). Y se supone el origen en el centro de la pelota. Un argumento geométrico o un cálculo, prueba $\mathbf{N} = R^2 \operatorname{sen}\theta\, X(\theta,\phi)$ y que la profundidad del punto (x,y,z) viene dada por $h = -z - R\cos\frac{l}{2R} = -R(\cos\theta + \cos\frac{l}{2R})$.



Por consiguiente (4.4) conduce a la integral inmediata

$$m = \int_0^{2\pi}\int_{\pi-\frac{l}{2R}}^{\pi} R^3(\cos\theta + \cos\frac{l}{2R}) \operatorname{sen}\theta\, \cos\theta\, d\theta d\phi = \frac{\pi}{3}R^3\big(2 - 3\cos\frac{l}{2R} + \cos^3\frac{l}{2R}\big)$$

que se reduce a (4.3) utilizando la fórmula trigonométrica $\cos\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha/2)$.

Una pregunta con respuesta: El principio de Arquímedes permite calcular la masa por medio de una integral de volumen mientras que argumentos que involucran la presión la calculan mediante una integral de superficie, ¿acaso existe una relación general entre estos dos tipos de integrales? El próximo capítulo veremos que la respuesta es afirmativa.

5. El teorema de Stokes y sus aplicaciones

Si un aciago día el estado positivo de Comte triunfase, quizá las escayolas de los lesionados, las paredes traseras de los solares, los forros de las carpetas y los bancos de los parques serían murales improvisados para egregias fórmulas autografiadas por los ciudadanos científicos. En lo que respecta a nuestra disciplina, seguramente el teorema de Stokes sería una de las que aparecería con gran frecuencia. En palabras de M. Spivak ([**Sp1**] p. 96), que seguramente no comparten muchos otros matemáticos: "El teorema de Stokes goza de tres importantes atributos que son propios de la mayoría de los grandes teoremas: 1) Es trivial. 2) Es trivial porque los términos que aparecen en él han sido definidos de manera adecuada. 3) Tiene consecuencias significativas".

Recuérdese el teorema fundamental del cálculo

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'.$$

Se puede entender esta igualdad diciendo que al integrar una derivada en $[a, b]$ se obtiene (la diferencia de) la función evaluada en la frontera del intervalo. El teorema de Stokes es una bella e interesante generalización en dimensiones superiores que permite reemplazar el intervalo $[a, b]$ por cualquier subvariedad de $\mathbb{R}^n$, entendiendo que para "evaluar" en la frontera debemos integrar porque hay infinitos puntos en general. Es una fórmula del tipo

$$\int_{\text{borde}} \text{“función”} = \int_{\text{región}} \text{“derivada rara de función”}$$

Una de las razones por las que este teorema es tan bello e interesante es que contiene infinitas fórmulas, una para cada dimensión, permitiendo englobar y probar varios teoremas clásicos aparentemente distintos de una sola tacada.

> *Sucede lo mismo con las partes de un todo: no todas están presentes al mismo tiempo, pero, si pudieran sentirse a la vez, agradarían más todas juntas que cada una por separado.* Confesiones. Libro IV, 11.

Además cuando uno consigue llevar a cabo la ardua tarea de comprender todas las definiciones necesarias para leer su enunciado con todo rigor, resulta que su prueba se reduce al caso de dimensión uno: el teorema fundamental del cálculo.

5.1. Enunciado y casos particulares

El gran paisaje general que nos muestra el teorema de Stokes no impide que, como haremos en esta sección, nos detengamos en algunos parajes de singular belleza o al menos en los que aparecen en las guías turísticas de los que visitan ocasionalmente el cálculo vectorial.

Antes de ver los monumentos con las inscripciones (no del todo justas) de Green, Stokes y Gauss, introduciremos, o más bien recordaremos, dos operadores relacionados con los campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN: *Sea* $\mathbf{F} : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) \in C^1$, *se llama* <u>*divergencia*</u> *de* $\mathbf{F}$, *y se denota mediante* $\operatorname{div} \mathbf{F}$ *ó* $\nabla \cdot \mathbf{F}$, *a la función*

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Y se llama <u>*rotacional*</u> *de* $\mathbf{F}$, *y se denota mediante* $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ *ó* $\nabla \times \mathbf{F}$, *al campo vectorial que corresponde formalmente al determinante*

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix};$$

esto es,

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

Los tres teoremas que vienen a continuación están en la línea antes mencionada: las integrales de una "derivada" se traducen en integrales de la función en la frontera. Al no tener una definición clara y rigurosa de subvariedades con frontera y las integrales sobre ellas, hay alguna imprecisión o falta de definición en los términos "frontera" o "región" pero todas las dudas desaparecerán para los aventureros que se internen en la próxima sección. Lo mismo ocurre con el significado de la orientación inducida.

Teorema 5.1 (de Green): *Sea* D *una región acotada del plano cuya frontera* ∂D *es una curva regular, entonces para todo campo vectorial en* $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{F} = (P, Q) \in C^1$, *se cumple*

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx\, dy$$

donde se considera en ∂D *la orientación inducida por* D.

Teorema 5.2 (de Stokes): *Sea* S *una superficie acotada en* $\mathbb{R}^3$ *cuya frontera* ∂S

es una curva regular, entonces para todo campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \in C^1$, *se cumple*

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

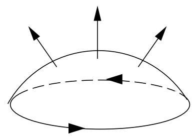
donde se considera en ∂S *la orientación inducida por* S.

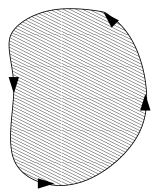
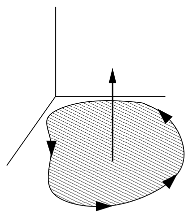
Teorema 5.3 (de la divergencia de Gauss): *Sea* V *una región acotada en* $\mathbb{R}^3$ *cuya frontera* ∂V *es una superficie regular, entonces para todo campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \in C^1$, *se cumple*

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}$$

donde se considera en ∂V *la orientación dada por la normal exterior.*

Hay varias reglas mnemotécnicas para explicar y recordar qué es la orientación inducida en el teorema de Stokes. Una de ellas es que si paseamos por ∂S con la cabeza en la dirección de la normal, entonces S debe quedar a la izquierda. Otra regla es la llamada *regla de la mano derecha*, que dice que si ponemos la mano derecha cerca de la frontera como el César al final de un combate de gladiadores pero con el pulgar apuntando en la dirección de la normal, entonces los dedos señalarán en la dirección en la que se recorre la frontera. La orientación inducida en el teorema de Green es exactamente la misma que en el de Stokes suponiendo que la normal a D se sale del plano apuntando verticalmente y hacia arriba, con lo cual para regiones convexas (en particular sin agujeros) ∂D se debe recorrer en sentido positivo: el contrario a las agujas del reloj.



Los nombres de estos tres teoremas clásicos del cálculo vectorial no responden fielmente a la historia. Todos ellos tienen relación con el trabajo de Gauss: el último aparece en sus estudios de electrostática, mientras que la idea que subyace a los dos primeros (ambos son prácticamente el mismo resultado) se encuentra en su prueba de lo que hoy se llama teorema de Gauss-Bonnet. El teorema de Stokes (para superficies) tiene un nombre ambiguo porque también se denomina así a la versión general para subvariedades y además no es del todo justo porque proviene (véase [**Sp1**]) de que apareció como pregunta en una competición establecida por Stokes, pero ninguna de las primeras demostraciones fue suya.

Por otro lado, Maxwell sí dio pruebas con el rigor de la época, y además empleó todos estos teoremas para construir la teoría matemática de los campos electromagnéticos.

Como hemos mencionado, el teorema de Green y el de Stokes (para superficies) son prácticamente dos versiones equivalentes de un mismo resultado. En un sentido es sencillo: Si S está totalmente contenida en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (es plana) y $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$ con $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ (el campo también es "plano"), entonces $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)$ y el teorema de Stokes implica el de Green. También se puede probar el recíproco, aunque no es fácil, usando que una superficie se parametriza en función de dos variables que por tanto sirven para "proyectarla" de alguna manera en $\mathbb{R}^2$ (véase [**Ma-Tr**]).

Antes de seguir veamos algunos ejemplos sencillos de cómo se pueden aplicar los teoremas anteriores.

Ejemplo . Hallar el trabajo realizado por una partícula que recorre la circunferencia unidad en el sentido de las agujas del reloj sometida al campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = (\log(x^2 + 1) + y^3, e^y - x^3).$$

Según el teorema de Green (nótese que la orientación no es la correcta), el trabajo pedido es

$$T = -\int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\, dy = \int_{B_1(\mathbf{0})} 3(x^2 + y^2) dx\, dy.$$

La última integral se evalúa fácilmente pasando a coordenadas polares

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Ejemplo (de un examen de 1º de Físicas). Calcular la integral del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2} + 2ye^{y^2}, ye^{x^2})$$

a lo largo de la elipse $x^2 + 3y^2 = 1$, $z = 1$, recorrida en sentido positivo.

Un cálculo prueba que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, así que el teorema de Stokes (con S la superficie plana limitada por la elipse: $x^2 + 3y^2 \le 1$, $z = 1$) implica que la integral pedida es nula.

Ejemplo . Calcular el flujo del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + e^y + \operatorname{sen} z, x^2 + z, xy + 5z)$$

a través de la esfera unidad con la normal exterior.

Por el teorema de la divergencia, como $\operatorname{div} \mathbf{F} = 6$, se tiene

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \int_{B_1(\mathbf{0})} 6\, dx\, dy\, dz = 8\pi.$$

El último cálculo es inmediato usando que el volumen de la esfera es $4\pi R^3/3$.

Ahora mostraremos algunas consecuencias de estos teoremas. En primer lugar, un sorprendente resultado que permite calcular el área de una región en $\mathbb{R}^2$ conociendo su frontera.

Corolario 5.4: *Sean D y ∂D como en el teorema de Green, entonces el área de D es*

$$A(D) = \int_{\partial D} \mathbf{F} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x).$$

<u>DEM.</u>: Se sigue directamente del teorema de Green que $\int_{\partial D} \mathbf{F} = \int_D 1\,dx\,dy$. ■

<u>Ejemplo</u> . Hallar el área limitada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ usando el resultado anterior.

La elipse es la imagen de $\sigma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t)$ con $0 \le t \le 2\pi$. Entonces el área limitada por ella es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\,\mathrm{sen}\, t, a\cos t)\cdot(-a\,\mathrm{sen}\, t, b\cos t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab.$$

Nótese que el resultado es natural porque la elipse se obtiene a partir del disco unidad, de área π, aplastando (o estirando) la x en la proporción $1:a$ y la y en $1:b$.

<u>Ejemplo</u> . Comprobar que si $r = f(\theta)$ con $f \in C^1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, define una curva cerrada en polares ($f(0) = f(2\pi)$), entonces el área de la región limitada por ella es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f^2(\theta)d\theta.$$

Basta usar la parametrización $\sigma(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta)$, en el corolario anterior para obtener

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta, f(\theta)\cos\theta)\cdot(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta, f'(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta)d\theta,$$

y después de operar se obtiene la fórmula pedida.

La segunda consecuencia que veremos tiene que ver con los campos conservativos y por su relevancia nos extenderemos un poco más en ella.

DEFINICIÓN: *Se dice que un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathcal{U} \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es <u>conservativo</u> si existe una función $f \in C^1(\mathcal{U})$, llamada habitualmente <u>potencial</u>, tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.*

Por ejemplo podemos comprobar que $\mathbf{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ es conservativo buscando un potencial f que satisfaga

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

La primera ecuación implica $f(x,y) = x^2y + g(y)$, y al sustituir en la segunda se obtiene $g(y) = \text{cte}$. Esto es, $f(x,y) = x^2y + \text{cte}$ son todos los potenciales posibles.

La importancia de los campos conservativos radica en que sus integrales de línea en un arco de curva sólo dependen de los extremos, no de la curva misma. El nombre proviene de que si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas conservativo entonces el trabajo que se gasta para ir de un sitio a otro coincide con el que se recibe al volver al lugar de partida aunque se haga por una trayectoria distinta, con lo cual el trabajo no se ha incrementado en nada, se ha conservado. Por ejemplo, como el campo gravitatorio es conservativo, en teoría (aunque difícilmente en la práctica por el rozamiento) se podría aprovechar la energía de una piedra que cae para hacerla volver a subir al punto de partida; y el coche de una montaña rusa podría funcionar continuamente sin ninguna tracción externa por la acción de su propio peso.

El cuerpo por su peso tiende a su lugar. El peso no sólo tiende hacia abajo, sino al lugar que le es propio. El fuego tiende hacia arriba; la piedra hacia abajo. Cada cosa es movida por su peso y tiende a su lugar. Confesiones. Libro XIII, 9.

Proposición 5.5: *Sea* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un campo vectorial* C^1 *con* $n = 2$ *o* $n = 3$, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\mathbf{F}$ *es conservativo.*

b) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ *si* $n = 3$, *o* $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = 0$ *si* $n = 2$.

c) $\int_{\sigma_1} \mathbf{F} = \int_{\sigma_2} \mathbf{F}$ *para* $\sigma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *con los mismos extremos, esto es,* $\sigma_1(a) = \sigma_2(c)$ *y* $\sigma_1(b) = \sigma_2(d)$.

Observación: La prueba que daremos, en realidad, se aplica a campos definidos en cualquier abierto convexo (el que contiene todos los segmentos que unen dos de sus puntos). El resultado se puede extender a otros dominios de definición de $\mathbf{F}$. Esencialmente es correcto en $\mathbb{R}^2$ si el dominio no tiene "agujeros" y en $\mathbb{R}^3$ si no tiene "tubos" pero es difícil explicar esto rigurosamente sin recurrir a nociones avanzadas de topología.

DEM.: Es fácil probar *a)* $\Rightarrow$ *b)* porque si $\mathbf{F} = \nabla f$ entonces la igualdad de las derivadas parciales cruzadas implica directamente $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = 0$ en $\mathbb{R}^2$ o $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^3$. Por otro lado

$$\int_\sigma \nabla f = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \sigma) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)),$$

y se deduce $a) \Rightarrow c)$.

Las implicaciones $b) \Rightarrow a)$ y $c) \Rightarrow a)$ son más complicadas. Para ambas consideraremos en el caso $n = 2$ la función

$$f(x,y) = \int_\sigma \mathbf{F}$$

donde σ parametriza el segmento de recta que conecta $(0,0)$ y (x,y). Consideremos también la línea quebrada σ_1 que une primero $(0,0)$ con $(x,0)$ y después este punto con (x,y). Si suponemos $c)$ entonces $\int_{\sigma_1} \mathbf{F} - \int_\sigma \mathbf{F} = 0$. La misma conclusión se obtiene suponiendo $b)$ ya que el teorema de Green aplicado al triángulo T de vértices $(0,0)$, $(x,0)$ y (x,y) conduce a

$$\int_{\partial T} \mathbf{F} = 0 \qquad \text{que equivale a } \int_{\sigma_1} \mathbf{F} - \int_\sigma \mathbf{F} = 0.$$

De la misma forma, suponiendo $b)$ o $c)$ se tiene $\int_{\sigma_2} \mathbf{F} - \int_\sigma \mathbf{F} = 0$ donde σ_2 es la línea quebrada que une $(0,0)$ con $(0,y)$ y después este punto con (x,y). En definitiva,

$$f(x,y) = \int_{\sigma_1} \mathbf{F} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \int_{\sigma_2} \mathbf{F}.$$

Es decir, con las parametrizaciones naturales,

$$f(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt \quad \text{y} \quad f(x,y) = \int_0^y F_2(0,t)dt + \int_0^x F_1(t,y)dt.$$

De la segunda ecuación se obtiene inmediatamente $\partial f/\partial x = F_1$ y de la primera $\partial f/\partial y = F_2$, con lo cual $\mathbf{F}$ es conservativo .

El caso $n = 3$ es análogo aplicando el teorema de Stokes en lugar del de Green y considerando σ_1, σ_2 y σ_3 que conecten $(0,0,0)$ con (x,y,z) a través de $(x,0,0)$ y $(x,y,0)$, de $(0,y,0)$ y $(0,y,z)$, y de $(0,0,z)$ y $(x,0,z)$. ■

Ejemplo . Probar que el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2} + 2ye^{y^2}, ye^{x^2})$$

es conservativo y hallar un potencial.

Según un ejemplo anterior, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, y esto prueba que es conservativo. Para hallar el potencial f, notamos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyze^{x^2} \;\Rightarrow\; f = yze^{x^2} + g(y,z).$$

Por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ze^{x^2} + 2ye^{y^2} \;\Rightarrow\; ze^{x^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = ze^{x^2} + 2ye^{y^2},$$

con lo cual $g(y,z) = e^{y^2} + h(z)$. Finalmente al imponer $\partial f/\partial z = ye^{x^2}$ se tiene que h es cualquier constante. Entonces $f(x,y,z) = yze^{x^2} + e^{y^2}$ es un potencial.

Ejemplo . Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x\,\mathrm{sen}\,y + e^y, x^2\cos y + xe^y + y)$$

a lo largo del arco de curva parametrizado por $\sigma(t) = (t - t^2, e^{t^2(t-1)}\,\mathrm{sen}(\pi t/2))$ con $0 \le t \le 1$.

Como $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = 0$, el campo es conservativo. entonces podemos elegir cualquier curva que conecte $\sigma(0) = (0,0)$ con $\sigma(1) = (0,1)$. Por ejemplo $\widehat{\sigma}(t) = (0,t)$ con $0 \le t \le 1$. Así pues

$$\int_\sigma \mathbf{F} = \int_{\widehat{\sigma}} \mathbf{F} = \int_0^1 \mathbf{F}(0,t)\cdot(0,1)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

Como última consecuencia veremos un resultado que ya habíamos avanzado el capítulo anterior. ¿No es increíble que uno pueda calcular explícitamente una integral de superficie sin especificar exactamente la superficie sobre la que se integra?

Corolario 5.6: *Sea el campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$ y sea S cualquier superficie cerrada que rodee al origen (en el sentido de que $S = \partial V$ con $\mathbf{0} \in V$ acotado), entonces*

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = 4\pi.$$

DEM.: Sea $W = V - B_\epsilon(\mathbf{0})$ con V como en el enunciado ($S = \partial V$) y ϵ suficientemente pequeño para que $\partial W = S \cup \partial B_\epsilon(\mathbf{0})$. El campo $\mathbf{F}$ es C^1 en W y un cálculo prueba que $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$, con lo cual por el teorema de la divergencia

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \int_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} - \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = -\int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{0})} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$$

donde $\partial B_\epsilon(\mathbf{0})$ lleva la orientación dada por la normal interior (porque el interior de $B_\epsilon(\mathbf{0})$ está en el exterior de W). Un ejemplo anterior justifica que el valor de la última integral es -4π. ■

Veamos ahora la demostración de uno de los teoremas anteriores en un caso sencillo, concretamente el de Green en el cuadrado unidad, para apreciar cuál es la idea. Ésta es sorprendentemente sencilla, nada más que el teorema fundamental del cálculo. La conclusión que debiera sacarse de este ejemplo a escala es que toda la complicación del teorema de Stokes general está en definir correctamente sus personajes, no en el argumento de la demostración.

Si $D = [0,1] \times [0,1]$ entonces ∂D son los cuatro lados del cuadrado. Llamaremos C_{x0} al que tiene $x = 0$, C_{x1} al que tiene $x = 1$, y lo mismo con C_{y0} y C_{y1}. Los lados $C_{x\kappa}$ tienen la parametrización obvia $\sigma : t \in [0,1] \mapsto (\kappa, t)$ y los $C_{y\kappa}$, $\sigma : t \in [0,1] \mapsto (t, \kappa)$. Como ∂D debe recorrerse en sentido positivo, se tiene

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} = \int_{\partial C_{y0}} \mathbf{F} + \int_{\partial C_{x1}} \mathbf{F} - \int_{\partial C_{y1}} \mathbf{F} - \int_{\partial C_{x0}} \mathbf{F}.$$

Y sustituyendo las parametrizaciones, si $\mathbf{F} = (P, Q)$,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} = \int_0^1 P(t,0)\,dt + \int_0^1 Q(1,t)\,dt - \int_0^1 P(t,1)\,dt - \int_0^1 Q(0,t)\,dt.$$

Por otro lado, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_0^1 Q(x,y)\Big|_{x=0}^{1} dy - \int_0^1 P(x,y)\Big|_{y=0}^{1} dx.$$

Lo cual coincide con la fórmula anterior.

Ya hemos visto que el teorema de Green es un bello teorema cuya demostración en un cuadrado es sencilla. ¿Por qué no aprovechar esta idea simple para obtener un bellísimo teorema general en cubos de manera que el teorema de Green sea sólo un diente del inmenso engranaje?

> *Esto mismo se puede decir igualmente de cualquier cuerpo hermoso. Un cuerpo cuyos miembros son todos hermosos es, sin comparación, mucho más hermoso que cada uno de los miembros, de cuya conexión ordenadísima se compone el conjunto, aunque cada uno de ellos sea ya de por sí hermoso.* Confesiones. Libro XIII, 28.

Los arcanos del próximo enunciado están reservados a los que pasaron por la última sección y son antesala del teorema más general, y por tanto más bello, que aparecerá en la siguiente. Quizá ahora se mostrará lógico haber empleado una "d" flácida, "∂", para indicar la frontera.

Teorema 5.7 (de Stokes para cubos): *Sea Q el cubo unidad en $\mathbb{R}^n$, $Q = [0,1]^n$, entonces para cada $(n-1)-$forma diferencial ω en $\mathbb{R}^n$*

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_Q d\omega$$

donde se considera en ∂Q la orientación inducida.

Observación: Las caras de Q son de la forma $(x_1, \dots, x_{i-1}, \kappa, x_{i+1}, \dots, x_n)$ con $\kappa = 0, 1$. Llamaremos a esta cara $C_{i\kappa}$ y $X_{i\kappa} : [0,1]^{n-1} \longrightarrow C_{i\kappa}$ a la parametrización que asigna a cada $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ el punto correspondiente de $C_{i\kappa}$. Con esta notación, *orientación inducida* quiere decir que si Q tiene la orientación dada por la parametrización identidad, entonces $X_{i\kappa}$ da la orientación correcta en $C_{i\kappa}$ si $i+\kappa$ es par, y la opuesta si es impar (compárese con el caso bidimensional). Es un buen ejercicio convencerse de que geométricamente esto es lo mismo que pedir la orientación de la normal exterior como en el teorema de la divergencia.

DEM.: Basta demostrarlo para

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

ya que toda $(n-1)-$forma es suma de formas de este tipo salvo cambiar el nombre de las variables.

Según lo dicho acerca de las orientaciones, con las parametrizaciones antes elegidas,

$$\int_{\partial Q} \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=0}^{1} (-1)^{i+\kappa} \int_{C_{i\kappa}} \omega = \sum_{\kappa=0}^{1} (-1)^{n+\kappa} \int_{C_{n\kappa}} \omega$$

donde la última igualdad es muy fácil recordando cómo se integraban formas diferenciales ($\partial X_{i\kappa}/\partial x_j = 0$ si $i = j$). Escribiendo la definición de la última integral se concluye

$$\int_{\partial Q} \omega = \sum_{\kappa=0}^{1} (-1)^{n+\kappa} \int_{[0,1]^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, \kappa)\, dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

Por otro lado

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$$

y se tiene por el teorema fundamental del cálculo (en la variable x_n)

$$\int_Q d\omega = (-1)^{n-1} \int_{[0,1]^n} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_1 \cdots dx_n = (-1)^{n-1} \int_{[0,1]^{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \Big|_{t=0}^{1} dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

que coincide con la expresión obtenida para $\int_{\partial Q} \omega$. ■

Nótese que para $n = 2$ con $\omega = P\,dx + Q\,dy$ el teorema anterior es el de Green en un cuadrado, mientras que para $n = 3$ con $\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$, es el de la divergencia en un cubo. En el caso $n = 1$, $\partial[0, 1] = \{0\} \cup \{1\}$ y "estirando" los comentarios anteriores con respecto a la orientación de $C_{i\kappa}$, se obtiene el teorema fundamental del cálculo con la $0-$forma $\omega = f$.

5.2. El caso general

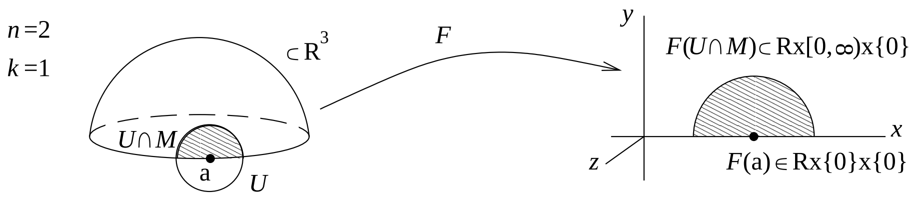
El problema al que debemos enfrentarnos es que conocemos la demostración del teorema de Stokes para cubos y queremos extenderla a regiones bastante generales. Una primera idea viene motivada por lo que sabemos de la teoría de la integral de Riemann: una región plana "decente" se aproxima como unión de cuadraditos. Sin embargo esta idea no parece ser acertada ya que, por ejemplo, si aproximamos un triángulo o un círculo con una malla de pequeños cuadraditos, puede que sus áreas sean muy parecidas pero sus perímetros difieren mucho. Es decir, no hay una aproximación simultánea de la región y su frontera. Otro problema mayor es que nosotros queremos considerar superficies que no sean necesariamente planas, como una superficie esférica. Estas dos objeciones sugieren que hay que considerar cuadraditos (o cubitos, en general) de lados curvos. Si los permitimos ni siquiera hay que dividir en una cantidad de ellos que tienda a infinito. Una vez que hemos asumido esta idea surgen nuevos problemas. Puede ser teóricamente muy difícil describir cómo descomponer una superficie general, por buena que sea, en cuadrados de lados curvos, por lo que nos vemos obligados a admitir que se solapen. Además, ni siquiera tenemos una idea teórica clara de lo que es integrar en una subvariedad, excepto en los casos en que teníamos la suerte de haber encontrado una parametrización *global*. Aunque éste sea el caso en la mayoría de los ejemplos preparados, no nos sirve para probar un teorema.

Los dos últimos problemas se resuelven con una misma arma: las particiones de la unidad. Antes de entrar en detalles, necesitamos ir todavía más atrás y comenzar definiendo qué es una subvariedad con frontera. Por ejemplo, ¿cómo podemos explicar teóricamente que el disco unidad cerrado tenga como frontera a la subvariedad S^1? La respuesta es que si aplicásemos el difeomorfismo del Teorema 3.1 *c*) en un entorno de un punto de S^1, la parte correspondiente del disco unidad se aplicaría justo encima (o debajo, es simplemente convencional) del eje $X = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Definición: *Se dice que $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ es una <u>subvariedad $n-$dimensional con frontera</u> y que su <u>frontera</u> es la subvariedad $n-$dimensional ∂M, si $M - \partial M$ es una subvariedad $n-$dimensional y para cada $\mathbf{a} \in \partial M$ existe un entorno suyo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ y un difeomorfismo* *sobre su imagen* $F:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^{n+k}$ *con* $F(\mathbf{a})\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{\mathbf{0}\}$ *tal que*

$$F(\mathcal{U}\cap M)=F(\mathcal{U})\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times[0,+\infty)\times\{\mathbf{0}\}).$$

Observación: Si algún $\mathbf{b}\in\mathcal{U}\cap\partial M$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{a}$, cumpliera $F(\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+\times\{\mathbf{0}\}$ se tendría una contradicción, aunque no es del todo sencillo obtenerla (véase **[Sp1]**, p. 105), utilizando que un abierto de $\mathbb{R}^{n+k}$ (en este caso un pequeño entorno de $F(\mathbf{b})$) da lugar a un abierto de $\mathbb{R}^n$ al intersecarlo con $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+\times\{\mathbf{0}\}$ (y proyectar sobre las n primeras coordenadas) pero no al intersecarlo con $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,+\infty)\times\{\mathbf{0}\}$ a no ser que esté contenido en el primer espacio. Es decir, debe cumplirse $F(\mathcal{U}\cap\partial M)=F(\mathcal{U})\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{\mathbf{0}\})$ con $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{k+1}$. Con lo cual ∂M es realmente una subvariedad $(n-1)-$dimensional. Con este mismo argumento se puede demostrar que si $\partial M\neq\emptyset$ entonces una subvariedad con frontera no es una subvariedad porque la definición original falla en la frontera.



Curiosamente, para complicar más las cosas, en contra de lo que parece si $M\subset\mathbb{R}^n$ es una subvariedad $n-$dimensional con frontera, ∂M puede no coincidir con la frontera topológica en ejemplos suficientemente artificiales (véase **[Fl]** p. 341) pero esto no será de interés aquí.

Antes de introducir las particiones de la unidad examinaremos primero un ejemplo muy sencillo que muestra cómo evitan el problema del solapamiento. Supongamos que tenemos un método (algoritmo numérico) para integrar bien en intervalos de longitud 1 y queremos calcular una integral en $[1,2'7]$ sin cambiar la variable. Ciertamente

$$[1,2'7]=[1,2]\cup[1'7,2'7]\qquad\text{pero}\qquad\int_1^{2'7}f\neq\int_1^2 f+\int_{1'7}^{2'7}f$$

porque los subintervalos se solapan. Inventémonos dos funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2, tales que $\phi_1+\phi_2=1$ de manera que ϕ_1 se anule fuera del primer intervalo y ϕ_2 fuera del segundo, entonces

$$\int_1^{2'7}f=\int_1^{2'7}(\phi_1+\phi_2)f=\int_1^{2'7}\phi_1 f+\int_1^{2'7}\phi_2 f=\int_1^2\phi_1 f+\int_{1'7}^{2'7}\phi_2 f.$$

Hemos "partido" la unidad en suma de dos funciones, cada una de ellas adaptada a un intervalo de longitud uno. En una subvariedad podemos hacer lo mismo para integrar dividiendo en cuadrados (o cubos $n-$dimensionales, en general) que quizá se solapen. Nos limitaremos al caso compacto, en el que el teorema de Stokes tiene sentido, pero el resultado básico que damos a continuación es más general (véase **[Sp1]** p. 58).

Existencia de particiones de la unidad: *Considérese un subconjunto compacto, M, de $\mathbb{R}^{n+k}$ que sea una subvariedad con frontera. Dada una colección de abiertos cuya unión recubra M, siempre existe un conjunto finito de funciones ϕ_α, llamadas <u>particiones de la unidad subordinadas al recubrimiento</u>, con las siguientes propiedades:*

a) $\phi_\alpha : \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi_\alpha \in C^\infty$.

b) $\sum \phi_\alpha = 1$.

c) El soporte de cada ϕ_α está contenido en algún abierto del recubrimiento.

Ahora vamos a resolver simultáneamente el problema de la subdivisión en cubos curvos y el de la definición de integral en una subvariedad, M, $n-$dimensional con frontera, compacta (y orientable, como pediremos después).

Sea $\mathbf{a} \in M - \partial M$, con F como en el teorema 3.1 *c*). Quizá componiendo con una traslación y una homotecia, podemos suponer que $F(\mathcal{U}) \supset [-1,1]^{n+k}$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$, y que $F(\mathbf{a}) = (1/2, 1/2, \dots, 1/2) \times \{\mathbf{0}\}$ con $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$. Entonces $B_{1/2}(F(\mathbf{a})) \subset F(\mathcal{U})$ y $\mathcal{U}_\mathbf{a} = F^{-1}\big(B_{1/2}(F(\mathbf{a}))\big)$ es un entorno abierto de $\mathbf{a}$ en $\mathbb{R}^{n+k}$, además $X(u_1, \dots, u_n) = F^{-1}(u_1, \dots, u_n, \mathbf{0})$ es una parametrización local con $X([0,1]^n) \supset \mathcal{U}_\mathbf{a} \cap M$. Si $\mathbf{a} \in \partial M$ se puede hacer exactamente lo mismo salvo que ahora $F(\mathbf{a})$ tiene una coordenada nula más (la $n-$ésima), además para X como antes, $X([0,1]^{n-1} \times \{0\}) \supset \mathcal{U}_\mathbf{a} \cap \partial M$. Con ello tenemos abiertos $\mathcal{U}_\mathbf{a}$ que recubren todo M y tales que la intersección de cada uno de ellos con M está dentro de un "cubo curvado" $X([0,1]^n)$. Escogiendo particiones de la unidad subordinadas al recubrimiento se define para una $n-$forma ω

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \omega$$

donde en cada sumando se usa la parametrización (restringida a $[0,1]^n$) $X : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, que corresponde al abierto $\mathcal{U}_\mathbf{a}$ dentro del que ϕ_α está soportada. Nótese que es indiferente que el cubo curvado $X([0,1]^n)$ sea mayor que el abierto donde integramos, porque fuera de éste ϕ_α se anula.

Recapitulando: queríamos integrar sobre una subvariedad, digamos una superficie, uniendo cuadraditos curvilíneos, pero excedía nuestras capacidades teóricas ensamblarlos perfectamente con lo cual el problema parecía insoluble. Entonces hemos recubierto todo con cuadraditos que no encajan, y para no rompernos la cabeza con el *puzzle* hemos limado las piezas dándoles diferentes grosores por medio de las particiones de la unidad, para que ajusten bien dando lugar a una lámina uniforme.

> *Es como si un hombre que no sabe nada de armaduras e ignora qué pieza corresponde a cada parte del cuerpo, quisiera cubrir la cabeza con las espinilleras o greba y los pies con el casco o celada, quejándose después de que no le ajustaban bien las piezas.*
> Confesiones. Libro III, 7.

Una última complicación teórica es que, como habíamos ya mencionado, las integrales sólo están bien definidas una vez que se ha especificado una orientación. Supondremos por tanto que la subvariedad con frontera es orientable, es decir que los cambios de parametrización $X_j^{-1} \circ X_i$ tienen jacobiano positivo donde estén definidos. Nótese que como ∂M viene dada por ciertas parametrizaciones de $M - \partial M$ restringidas a $u_n = 0$, las orientaciones de $M - \partial M$ y de ∂M no son independientes y la última queda condicionada por la primera. Se dice que ∂M tiene la orientación inducida por M. Se deja al lector interesado deducir de estas definiciones la mnemotécnica regla de la mano derecha para superficies en $\mathbb{R}^3$.

Ahora, ya con conocimiento de causa, podemos enunciar el teorema de Stokes general y dar una prueba.

Teorema 5.8 (de Stokes): *Sea $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ una subvariedad $n-$dimensional con frontera, orientable y compacta. Para cada $(n-1)-$forma ω se cumple*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

donde se supone en ∂M la orientación inducida.

Observación: Quizá la demostración parezca más difícil de lo que indicaban comentarios anteriores. Esto es en parte debido a que no nos hemos adentrado en algunas propiedades sencillas de las formas diferenciales. Con ellas la demostración se reduciría a unas líneas (véase **[Sp1]** p. 115 y **[Ed]** p. 369) aunque habría que pagar con otras muchas en alguna sección anterior.

DEM.: Como observamos en el caso del teorema para cubos, no se pierde generalidad suponiendo que

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}. \tag{5.1}$$

Consideremos una partición de la unidad ϕ_α como antes, es decir, de manera que tengamos para cada abierto $\mathcal{U}$ del recubrimiento una parametrización X tal que $X([0,1]^n) \supset \mathcal{U} \cap M$ y $X([0,1]^{n-1} \times \{0\}) \supset \mathcal{U} \cap \partial M$. Veamos que basta demostrar el teorema para las formas $\phi_\alpha \omega$ (esto no es obvio porque en principio no está claro que $\sum d(\phi_\alpha \omega) = \sum \phi_\alpha d\omega$).

Para ello escribimos

$$\int_M d\omega = \int_M \sum_\alpha \phi_\alpha d\omega = \sum_\alpha \int_M (d\phi_\alpha \wedge \omega + \phi_\alpha d\omega)$$

donde la última igualdad es trivial usando que $\sum \phi_\alpha = 1 \Rightarrow d(\sum \phi_\alpha) = 0$. Es fácil ver (simplemente por la regla del producto) que el término entre paréntesis es $d(\phi_\alpha \omega)$. Por consiguiente, si el teorema fuera cierto para $\phi_\alpha \omega$ entonces

$$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_M d(\phi_\alpha \omega) = \sum_\alpha \int_{\partial M} \phi_\alpha \omega = \int_{\partial M} \omega$$

y el teorema sería cierto en general.

Resumiendo todas estas reducciones: podemos suponer que ω es de la forma (5.1) donde f tiene su soporte en un abierto $\mathcal{U}$, de manera que exista una parametrización $X = X(u_1, u_2, \dots, u_n)$ tal que la imagen del cubo $Q = [0,1]^n$ cubra todo $\mathcal{U} \cap M$ y que además $\mathcal{U} \cap \partial M$ esté contenido en la imagen de los puntos que tienen $u_n = 0$.

Por definición (véase el capítulo anterior) se tiene

$$\int_M d\omega = \int_Q \sum_{m=1}^{n+k} \big(\frac{\partial f}{\partial x_m} \circ X\big) \det(X'_{\mathbf{i}})\, du_1 du_2 \dots du_n \tag{5.2}$$

donde $\mathbf{i} = (m, 1, 2, \dots, n-1)$. Es decir, $\det(X'_{\mathbf{i}})$ es el determinante formado por las filas m, 1, 2, $\dots, n-1$ de X'.

Considérese la forma

$$\eta = (f \circ X) \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}=1}^{n} \frac{\partial X_1}{\partial u_{i_1}} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial u_{i_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial X_{n-1}}{\partial u_{i_{n-1}}} du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \dots \wedge du_{i_{n-1}}.$$

Usando que por la simetría $\sum_{i,j} \big(\partial^2 X_r / \partial u_i \partial u_j\big)\, du_i \wedge du_j = 0$, vemos que para calcular la diferencial de η sólo hay que derivar $f \circ X$, esto es,

$$d\eta = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{n} \frac{\partial (f \circ X)}{\partial u_{i_n}} \frac{\partial X_1}{\partial u_{i_1}} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial u_{i_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial X_{n-1}}{\partial u_{i_{n-1}}} du_{i_n} \wedge du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \dots \wedge du_{i_{n-1}}$$

$$= \sum_{m=1}^{n+k} \big(\frac{\partial f}{\partial x_m} \circ X\big) \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{n} \frac{\partial X_m}{\partial u_{i_n}} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial u_{i_1}} \cdots \frac{\partial X_{n-1}}{\partial u_{i_{n-1}}} du_{i_n} \wedge du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \dots \wedge du_{i_{n-1}}$$

Nótese que $du_{i_n} \wedge du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \cdots \wedge du_{i_{n-1}}$ es nulo si hay dos subíndices repetidos y en otro caso coincide con $\operatorname{sgn}(\sigma)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$, donde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutación que lleva $i_n, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ a $1, 2, \ldots n$ (esto es, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ vale $+1$ si se necesita un número par de intercambios y -1 si se necesita un número impar). Por la definición de determinante en términos de permutaciones, se sigue de (5.2) la igualdad

$$\int_M d\omega = \int_Q d\eta.$$

Por el teorema de Stokes para cubos se tiene

$$\int_M d\omega = \int_{\partial Q} \eta = \int_{\partial Q} (f \circ X) \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}=1}^{n} \frac{\partial X_1}{\partial u_{i_1}} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial u_{i_2}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial X_{n-1}}{\partial u_{i_{n-1}}}\, du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \cdots \wedge du_{i_{n-1}}.$$

Como $X([0,1]^{n-1} \times \{0\}) \supset \mathcal{U} \cap \partial M$ y f está soportada en $\mathcal{U}$, la integral anterior es nula excepto si $i_1, \ldots, i_{n-1}$ es una permutación de $1, 2, \ldots, n-1$. Usando como antes la definición de determinante en términos de permutaciones

$$\int_M d\omega = \int_{[0,1]^{n-1}} (f \circ X)\, \det(X'_{\mathbf{i}})\, du_1 du_2 \ldots du_{n-1}$$

con $\mathbf{i} = (1, 2, \ldots, n-1)$. Y esta última expresión es justamente la fórmula que define la integral $\int_{\partial M} \omega$. ■

<u>Ejemplo</u> . Dar una fórmula para $\int_C \mathbf{F}$ para campos vectoriales $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^4$ cuando la curva C es el borde de una superficie (2−dimensional) compacta con frontera.

Sea $S \subset \mathbb{R}^4$ la superficie con $\partial S = C$. Buscamos una fórmula para

$$\int_C \mathbf{F} = \int_C \omega \qquad \text{con} \qquad \omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 + F_4 dx_4.$$

Para ello calculamos la diferencial

$$\begin{aligned} d\omega =& \big(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_4} dx_4\big) \wedge dx_1 + \big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_4} dx_4\big) \wedge dx_2 \\ &+ \big(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_4} dx_4\big) \wedge dx_3 + \big(\frac{\partial F_4}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_4}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_4}{\partial x_3} dx_3\big) \wedge dx_4 \end{aligned}$$

Agrupando términos y aplicando el teorema de Stokes, se obtiene

$$\int_C \mathbf{F} = \int_S \sum_{1\le i<j\le 4} A_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$$

donde

$$A_{12} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \qquad A_{13} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, \qquad A_{14} = \frac{\partial F_4}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_4},$$

$$A_{23} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \qquad A_{24} = \frac{\partial F_4}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_4}, \qquad A_{34} = \frac{\partial F_4}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_4}.$$

Éstas son esencialmente las componentes del análogo del rotacional en $\mathbb{R}^4$, que ya no es un campo vectorial de cuatro coordenadas sino algo un poco más complejo que se llama *campo tensorial* o *tensor*. Al igual que ocurría en $\mathbb{R}^3$, un campo será conservativo en $\mathbb{R}^4$ si los A_{ij} son todos nulos.

5.3. Aplicaciones

En esta sección pasearemos por ciertas de las ecuaciones de la Física-matemática de la mano de algunos de los teoremas de este capítulo. Para ellos, más que viaje será retorno, porque, por ejemplo, el teorema de la divergencia proviene de trabajos de Gauss en electrostática y una de las primeras pruebas del teorema de Stokes (para superficies) es de Maxwell quien lo usó para enunciar y transformar sus ecuaciones del electromagnetismo. Con suerte, algunos estudiantes quizá puedan ver en esta sección y en otras asignaturas (Modelización o Historia) una forma diferente de aprender y entender las Matemáticas.

> *Verdad es que en aquellos estudios aprendí muchas palabras útiles. Pero también se pueden aprender en las cosas que no son vanas y éste es el camino seguro que ha de seguir un niño.* Confesiones. Libro I, 15.

<u>La ecuación del calor</u>:

El calor no es más que una forma de energía, por eso en la caja de cereales del desayuno aparece el contenido energético tanto en kilojulios (KJ) como en kilocalorías (Kcal), comúnmente llamadas calorías, por error, en dietética. La temperatura absoluta, que denotaremos por u, es la energía media, de modo que el calor total en una porción sólida homogénea V de cierta sustancia, es

$$Q = K \int_V u$$

donde K es una constante positiva que depende del tipo de sustancia considerada. Cuando un cuerpo caliente se pone en contacto con otro frío la energía (el calor) fluye del primero al segundo. Por ejemplo, en una dimensión si tenemos un punto x a temperatura $u(x)$ y otro "al lado", $x + \Delta x$, a temperatura $u(x + \Delta x)$, parece lógico suponer que el calor fluirá del primero al segundo en una magnitud proporcional a $u(x) - u(x + \Delta x) \approx -\Delta x\, \partial u/\partial x$. La ley de enfriamiento de Newton no es otra cosa que esta suposición en tres dimensiones. Concretamente que el vector flujo de energía es proporcional a $-\nabla u$ (recuérdese que la dirección opuesta al gradiente es siempre la de máximo decrecimiento) y por tanto el flujo del calor a través de la frontera de V es, para cierta constante $K' > 0$,

$$\mathcal{F} = -K' \int_{\partial V} \nabla u.$$

Si el calor se escapa de los puntos calientes a los fríos, la temperatura cambia con el tiempo, como nos demuestra cualquier taza de café, digamos $u = u(\mathbf{x}, t)$. Parece obvio que las pérdidas de calor de la porción de sustancia V que hemos seleccionado, se hacen a través de la frontera, es decir, que la variación del calor en V por unidad de tiempo se cancele con el flujo a través de la frontera. Escrito con fórmulas

$$K \frac{d}{dt} \int_V u - K' \int_{\partial V} \nabla u = 0.$$

Nótese que lo único que estamos diciendo es que para sacar algo (en nuestro caso calor) de un cuerpo hay que hacerlo a través de su frontera. Escogiendo las unidades físicas de manera que $K'/K = 1$, para que la fórmula quede bonita, e introduciendo la derivada bajo el signo integral,

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\partial V} \nabla u = 0.$$

Aplicando el teorema de la divergencia se obtiene

$$\int_V \big(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\big) = 0 \qquad \text{con } \Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Si esta igualdad se cumple para cualquier porción V de la sustancia elegida, no queda más remedio que el integrando se anule (la función nula es la única que integrada en cualquier parte da cero). Llegamos entonces finalmente a la ecuación del calor

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u}$$

Supongamos que en lugar de un sólido consideramos una varilla unidimensional infinita, $\mathbb{R}$, entonces en la ecuación del calor las variables y y z son irrelevantes. Si dicha varilla tiene una temperatura inicial dada por $f = f(x) \geq 0$, se puede probar que la solución de la ecuación resultante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{con} \qquad u(x,0) = f(x),$$

es (bajo débiles condiciones de regularidad sobre f)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-v)^2/t} f(v)\, dv \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

con esta fórmula se pueden deducir sin dificultad varias propiedades físicas como que el punto más caliente se enfría con el paso del tiempo (principio del máximo). Sin embargo hay algo un poco chocante y es que si f está soportada en un intervalo finito $[a, b]$ entonces para cualquier $t > 0$ se tiene $u > 0$ en todo punto. Es como si el calor se transmitiese infinitamente rápido. Aunque es imposible percibir esta transmisión en experimentos normales (tendríamos que medir cantidades infinitesimales por el rápido decaimiento exponencial), podemos sospechar que la ecuación del calor debe modificarse en condiciones extremas. Se ha comprobado que esto es así, por ejemplo, en las reacciones nucleares. La explicación es que la ley de enfriamiento de Newton no es correcta del todo en casos límite porque cuando hay gradientes de temperatura muy grandes las propiedades físico-químicas de la materia, que no es ni homogénea ni continua a pequeñas escalas, se alteran. Sin embargo la ecuación del calor se revela como un buen modelo para la muchos de los fenómenos térmicos que nos rodean.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

Según la ley de Coulomb, una carga q estática en $\mathbf{r}_0$, genera un campo eléctrico cuya intensidad es

$$\mathbf{E} = Kq \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}$$

donde K es una cierta constante (en el sistema internacional $K \approx 9 \cdot 10^9$). Esto quiere decir que una carga de prueba q' situada en $\mathbf{r}$ sufriría una fuerza $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$. Un cálculo sencillo muestra que $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ en todo punto $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ (nótese que $\mathbf{E}$ es salvo una traslación igual al campo $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$ que ya habíamos estudiado). En particular, por el teorema de la divergencia $\int_S \mathbf{E} = 0$ para toda superficie cerrada que no contenga a $\mathbf{r}_0$. Si el campo está generado por varias cargas tendremos que sumar varias expresiones como la anterior, pero siempre obtendremos que para superficies cerradas que no encierren cargas, el flujo se anula, o lo que es lo mismo, $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Pensando el campo eléctrico como un fluido, esto es como decir que en cualquier superficie cerrada todas las líneas de fuerza que entran también salen y viceversa, siempre que no haya cargas en el interior que actúen como "fuentes" de líneas de fuerza.

Los experimentos muestran que esto sigue siendo cierto incluso aunque las cargas que generan el campo sean muchas (infinitas) o no permanezcan estáticas. Por tanto en toda región libre de cargas se cumple la primera ecuación de Maxwell en el vacío (también llamada ley de Gauss)

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = 0}$$

Consideremos ahora un experimento hoy en día sencillo pero no tanto cuando lo hicieron Faraday o Henry. Al pasar rápidamente un imán por dentro de una espira L aparece una corriente eléctrica circulando por ella (éste es el principio de la dinamo y de los generadores eléctricos). Resulta que cuanto más deprisa pasemos el imán o cuantos más imanes atraviesen la superficie S que limita la espira, mayor es la fuerza electromotriz inducida. Esto hace pensar que hay una intensidad de campo magnético $\mathbf{B}$ (en realidad se llama *inducción magnética*) de manera que cuanto mayor sea la variación del flujo por S, mayor es la circulación de $\mathbf{E}$ por L. Es decir,

$$\int_L \mathbf{E} = K \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}.$$

Para respetar algunas convenciones acerca de la orientación (la regla de la mano derecha), K debe ser una constante negativa, y con las unidades de la inducción magnética del sistema internacional (así se eligieron) se tiene $K = -1$. Introduciendo la derivación bajo la integral y aplicando el teorema de Stokes para superficies, se obtiene

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \int_S \big(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \big) = 0.$$

Podemos elegir como S cualquier superficie con frontera (ésta es la espira a la que se puede dar forma arbitraria), por tanto la fórmula anterior implica la tercera ecuación de Maxwell

(también llamada de Faraday-Henry)

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}}$$

El campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el magnético $\mathbf{B}$ guardan una perfecta simetría salvo que $\mathbf{B}$ actúa sobre cargas en movimiento ($\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, se puede suponer que dentro del hierro atraído por un imán los electrones tienen una especie de "giro sobre sí mismo", el *spin*) y que hasta la fecha no se han observado cargas magnéticas individuales (llamadas monopolos). Por razones desconocidas los polos (norte y sur) de un imán siempre aparecen por parejas pero todo funciona como si hubiera cargas magnéticas y una fuerza análoga a la de Coulomb. Maxwell procedió de esta manera suponiendo dichas cargas magnéticas que se cancelan por pares y, siguiendo a Gauss, enunció la segunda ley de Maxwell

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{B} = 0}$$

También consideró la simétrica a la tercera ecuación. Con las orientaciones usuales resulta que la constante análoga a K, que valía -1, esta vez es positiva y en el Sistema Internacional no tiene un valor "bonito", sino que es aproximadamente $1'1126 \cdot 10^{-17}$, por ello es común en libros avanzados usar otro sistema de unidades en el que la constante es uno. Aquí no introduciremos estas unidades, pero por razones que se harán claras más adelante, llamaremos $1/c^2$ a la constante en el Sistema Internacional. En definitiva, se tiene la cuarta ecuación de Maxwell en el vacío

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}} \qquad \text{con} \qquad \frac{1}{c^2} = 1'1126 \cdot 10^{-17}.$$

Las cuatro ecuaciones de Maxwell regulan los fenómenos electromagnéticos en ausencia de cargas y corrientes. Si admitiéramos que estamos "en una carga" habría que hacer algunas modificaciones no demasiado drásticas (sólo un término relacionado con la densidad de carga y su velocidad en la primera y la cuarta). Incluso en esta forma generalizada, los fenómenos físicos que representan estas ecuaciones eran conocidos en tiempos de Maxwell. En realidad sólo una parte de la cuarta ecuación fue estrictamente obra suya. Uno de los grandes méritos de Maxwell fue darse cuenta de que las ecuaciones escritas en forma tan sintética después de aplicar los teoremas de este capítulo, constituyen el camino correcto y todo lo necesario para entender los fenómenos electromagnéticos. En definitiva, cualquier cosa que se nos pueda ocurrir preguntar acerca del electromagnetismo está incluido de alguna forma en la siguiente línea

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{E}=0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.}$$

Faraday, que odiaba escribir incluso las fórmulas matemáticas más simples, se sentiría horrorizado al ver que estas ecuaciones en derivadas parciales representan los sencillos fenómenos de inducción que él descubrió. ¿Qué ventaja hay en esta formulación? Aquí nos limitaremos a una de las consecuencias que dedujo Maxwell y que ha cambiado el mundo desde principios del siglo XX: Existen ondas electromagnéticas y se transmiten a una velocidad de unos $300\,000\,km/s$.

Derivando la cuarta ecuación de Maxwell con respecto al tiempo y sustituyendo la tercera, se obtiene

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Se puede comprobar con tediosos cálculos (o usando algún truco) que para cualquier campo $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ se verifica $-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}=\Delta\mathbf{F}-\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$, lo que sustituido en la fórmula anterior implica, después de emplear la primera ecuación de Maxwell,

$$\boxed{\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=c^2\Delta\mathbf{E}}$$

y ésta es la ecuación (vectorial) de ondas con velocidad c. ¿En qué sentido realmente son las soluciones ondas que viajan a velocidad c? Se responderá a ello ampliamente en los cursos de ecuaciones, pero veamos aquí un caso sencillo e ilustrativo. Si $\mathbf{E}$ no depende de y ni de z (es una onda plana) entonces cada una de sus componente de $\mathbf{E}$ satisfacen la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

cuya solución general es

$$u=u_1+u_2 \qquad \text{con} \qquad u_1=f(x-ct), \quad u_2=g(x-ct)$$

donde f y g son funciones C^2 arbitrarias. Nótese que la gráfica de u_1 para $t=0$ coincide con la de f; para $t=1$ se traslada c unidades a la derecha; para $t=2$ se traslada $2c$ unidades, etc. Lo mismo ocurre con u_2 salvo que ahora la gráfica viaja a la izquierda con velocidad c. El caso tridimensional general es geométricamente más complejo pero cualitativamente similar: un “pulso” en cierto punto tarda $1/c$ veces d segundos en hacerse notar en otro punto situado a distancia d (ésta es la idea del “dominio de influencia” o “de dependencia”).

Según hemos mencionado, se conoce experimentalmente que $1/c^2 = 1'1126 \cdot 10^{-17}$, de donde se deduce $c = 2'9979 \cdot 10^8$ que coincide con la velocidad de la luz en el vacío. Aunque en 1873 ni $1/c^2$ ni la velocidad de la luz eran conocidas con mucha exactitud, al darse cuenta de que eran cantidades parecidas, Maxwell conjeturó que la luz era una onda electromagnética. ¿Había otras ondas electromagnéticas invisibles? Hertz (curiosamente tratando de encontrar algún fallo en las ecuaciones de Maxwell) demostró quince años después en su primitivo laboratorio que era así y que incluso podía crearlas en un punto y detectarlas unos cuantos metros después. Amanecía una nueva época dominada por las telecomunicaciones.

Las ecuaciones de Navier-Stokes:

Supongamos que queremos describir el movimiento en el seno de un fluido incompresible y de densidad $\rho = 1$, es decir, el agua. Para ello podemos proceder de dos formas: persiguiendo a cada partícula que compone el fluido dando su ecuación de movimiento (descripción lagrangiana) o quedándonos quietos y midiendo en cada instante la velocidad de la partícula que pasa por allí (descripción euleriana). La segunda forma se muestra más cómoda y por tanto buscaremos una función $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ que para cada valor de t nos diga cuál es la velocidad en $\mathbf{x}$. Esta función es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuando se fija t, por ello conservamos la notación usada para ellos.

Como explicamos en el capítulo anterior, la cantidad de fluido que atraviesa una superficie S por unidad de tiempo viene dada por el flujo $\int_S \mathbf{V}$. Si se tiene una superficie cerrada $S = \partial V$ que no encierra ni fuentes ni sumideros (que son puntos singulares), entonces todo el fluido que entra a través de S por un lado, debe salir por otro. De manera que el flujo se anula y por el teorema de la divergencia

$$0 = \int_S \mathbf{V} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Esta igualdad debe cumplirse para cualquier región V dentro del fluido con lo cual necesariamente se tiene la ecuación de continuidad

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{V} = 0}$$

En los cursos básicos de mecánica todo se resolvía escribiendo $F = m\,a$. Al estudiar las bases de la mecánica de fluidos no vamos a ser menos y las ecuaciones de Navier-Stokes no serán otra cosa que una idealización de esta fórmula cuando se aplica a porciones muy pequeñas del fluido. Para ver las fuerzas que actúan imaginemos mentalmente que el fluido está dividido en cubitos de lado pequeño, digamos con las aristas en la dirección de los ejes, para fijar ideas. Cada uno de ellos se verá previsiblemente empujado a través de sus caras por los cubitos adyacentes y es natural suponer que este empuje se ejerce perpendicularmente a la superficie de las caras (más adelante revisaremos esta hipótesis admitiendo rozamientos) y obviamente se dirige hacia el interior (un saco de boxeo se abolla hacia dentro). Al módulo de esta fuerza de empuje por unidad de superficie, en cualquier dirección se le llama presión y se le denota mediante p. Es decir, en la dirección x la fuerza por unidad de superficie (perpendicular al eje x) es $(p,0,0)$, en la dirección y es $(0,p,0)$ y en la dirección z es $(0,0,p)$. Con lo cual la fuerza que actúa en total sobre la superficie ∂V de una porción de fluido V es

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \int_{\partial V} (p,0,0) + \mathbf{e}_2 \int_{\partial V} (0,p,0) + \mathbf{e}_3 \int_{\partial V} (0,0,p)$$

donde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2$ son los vectores de la base canónica y ∂V tiene la orientación dada por la normal interior. El teorema de la divergencia (o simplemente el teorema fundamental del cálculo) implica

$$\mathbf{F} = -\mathbf{e}_1 \int_V \frac{\partial p}{\partial x} - \mathbf{e}_2 \int_V \frac{\partial p}{\partial y} - \mathbf{e}_3 \int_V \frac{\partial p}{\partial z} = -\int_V \nabla p,$$

donde la última integral de volumen se sobreentiende que se hace componente a componente.

Muchas veces hay fuerzas externas que no tienen que ver con la presión. Por ejemplo, a no ser hagamos experimentos en el espacio exterior, cualquier porción de fluido tiende naturalmente a caer con la aceleración de la gravedad $(0,0,-g)$. En este caso y en otros de interés, el campo de aceleraciones correspondiente a las fuerzas externas es conservativo, teniéndose $\mathbf{a}_{\text{ext}} = -\nabla f_{\text{ext}}$ donde el signo negativo es puramente convencional. Al sumar (integrar) el diferencial de fuerza $\mathbf{a}_{\text{ext}} dm = \mathbf{a}_{\text{ext}} dx\, dy\, dz$ (recuérdese que la densidad es 1) en V, tenemos que la fuerza resultante en dicho elemento de fluido es

$$\mathbf{F} = -\int_V \nabla(p + f_{\text{ext}})$$

con f_{ext}, como antes, el potencial de las fuerzas externas (si existen). Como acabamos de hacer con las fuerzas externas, podemos reescribir el primer miembro pensando que $\mathbf{F}$ es la resultante de todas las fuerzas de las partículas que componente V, con lo cual

$$\int_V \mathbf{a} = -\int_V \nabla(p + f_{\text{ext}}) \quad \text{para todo } V \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = -\nabla(p + f_{\text{ext}})$$

donde $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ es la aceleración, en el tiempo t, de la partícula situada en $\mathbf{x}$.

¿Qué relación hay entre el campo de velocidades $\mathbf{V}$ y el de aceleraciones? Uno estaría tentado a responder que como la aceleración de una partícula es la derivada de su aceleración $\partial\mathbf{V}/\partial t = \mathbf{a}$, pero esto no es cierto porque $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ da el valor de la velocidad de diferentes partículas si variamos t, en particular si derivamos con respecto de esta variable. Si persiguiéramos a una sola partícula en su movimiento (descripción lagrangiana), consiguiendo saber en cada instante t su posición $(x(t), y(t), z(t))$, su velocidad vendría dada por $\mathbf{v}(t) = \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t), t)$. Con lo cual, su aceleración en el tiempo t sería, por la regla de la cadena,

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + x'(t)\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + z'(t)\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V_1\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + V_2\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + V_3\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$

donde V_1, V_2, V_3 son las componentes de $\mathbf{V}$. Por razones evidentes se suele escribir esta igualdad como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}.$$

Para los que están más duchos en geometría esta expresión puede entenderse de la misma forma que la fórmula para la derivada covariante: Al calcular la aceleración tenemos que derivar la velocidad y sumar un término extra debido a que el sistema de referencia se está moviendo.

En definitiva, hemos obtenido las <u>ecuaciones de Euler</u>

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla(p + f_{\text{ext}})}$$

Aunque estas ecuaciones son un buen modelo en muchos casos, aprendamos a través de Feynman ("*Feynman Física*" V. II. Fondo educativo interamericano 1972) la opinión que le merecían a un importante físico-matemático: "John von Neumann era perfectamente consciente de la gran diferencia entre lo que sucede cuando no se tienen los términos de viscosidad y cuando sí se tienen; y también era consciente de que durante la mayor parte del desarrollo de la hidrodinámica hasta alrededor de 1900, casi todo el interés estuvo en resolver bonitos problemas *matemáticos* con esta aproximación que nada tiene que ver con los fluidos reales. Caracterizó al teórico que hacía tales análisis como un hombre que estudiaba el 'agua seca'. Tales análisis dejan de lado una propiedad esencial del fluido". Esta propiedad denominada viscosidad a la que se refiere Feynman, la podemos observar (al menos mentalmente, para no organizar un desastre) al volcar un vaso con agua y otro con miel. En el primer caso el fluido comienza a caer inmediatamente y en el segundo no. La razón es que hay una especie de rozamiento interno en la miel que no permite que dos partículas vecinas tengan velocidades paralelas muy diferentes. En la imagen del fluido divido en pequeños cubitos, es como si éstos fueran ásperos o pegajosos y al rozar a los vecinos tendieran a arrastrarlos consigo sin necesidad de empujarlos.

Por ejemplo, si tenemos un fluido cuyas partículas se mueven paralelamente al eje X, $\mathbf{V} = (V_1, 0, 0)$ entonces se crea una fuerza de "reacción" que depende de la variación de la velocidad en las direcciones Y y Z. Lo más natural es suponer, y experimentalmente se comprueba que es así con gran aproximación, que esta dependencia es lineal en las correspondientes derivadas, de forma que se tiene una especie de "presión oblicua" (fuerza por unidad de superficie) en la dirección de movimiento dada por

$$-\nu \big(0, \frac{\partial V_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial z}\big)$$

donde ν es una constante para cada fluido, llamada *coeficiente de viscosidad*. Esta presión contribuirá a frenar a las partículas de un elemento de fluido V en la dirección de movimiento, la del eje X, con una fuerza

$$F_{\text{visc.}} = -\nu \int_{\partial V} \big(0, \frac{\partial V_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial z}\big) = \nu \int_V \big(\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\big)$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia (con la normal interior). De la ecuación $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ se sigue en nuestro caso $\partial V_1/\partial x = 0$ y en particular podemos escribir

$$F_{\text{visc.}} = \nu \int_V \Delta V_1.$$

En el caso general $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ se tiene la igualdad análoga con tres coordenadas

$$\mathbf{F}_{\text{visc.}} = \nu \int_V \Delta \mathbf{V}.$$

Cuando añadimos esta fuerza en el balance que hicimos antes para las ecuaciones de

Euler, se llega finalmente a las <u>ecuaciones de Navier-Stokes</u> que en palabras de Feynman corresponden al “agua mojada”,

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{V}=0, \qquad \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=-\nabla(p+f_{\text{ext}})+\nu\Delta\mathbf{V}}$$

Si queremos despreocuparnos de fuerzas externas y presiones, podemos hacerlo tomando rotacionales en ambos términos obteniendo las ecuaciones

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{V}=0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{V}=\mathbf{\Omega}, \qquad \frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial\mathbf{t}}+\operatorname{rot}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V})=\nu\Delta\mathbf{\Omega}}$$

donde se ha usado la identidad del análisis vectorial

$$(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{F}=(\operatorname{rot}\mathbf{F})\times\mathbf{F}+\frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{F}\|^2)$$

y que $\operatorname{rot}\nabla=\mathbf{0}$. Al campo $\mathbf{\Omega}$ se le llama <u>vorticidad</u>. Según el teorema de Stokes para cualquier curva cerrada C que sea frontera de una superficie S se tiene

$$\int_C \mathbf{V}=\int_S \mathbf{\Omega},$$

de manera que $\mathbf{\Omega}$ mide la circulación del campo de velocidades $\mathbf{V}$ en trayectorias cerradas, es decir, en algún sentido los remolinos que hay. De ahí su nombre.

Círculos y raíces

Material:

- Una calculadora programable u ordenador (en su defecto una calculadora lo más avanzada posible).

Objetivos: Mostrar una fórmula para localizar el módulo de las raíces de un polinomio basada en el teorema de Green.

El experimento: Sea un polinomio real $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_0 \neq 0$. Dado $r > 0$ asociamos a P la función real $F_r = (A_r D_r + B_r C_r)/(A_r^2 + B_r^2)$ donde

$$A_r(t) = a_n r^n \cos(nt) + a_{n-1} r^{n-1} \cos((n-1)t) + \ldots + a_1 r \cos t + a_0, \qquad C_r(t) = -A_r'(t),$$
$$B_r(t) = a_n r^n \operatorname{sen}(nt) + a_{n-1} r^{n-1} \operatorname{sen}((n-1)t) + \ldots + a_1 r \operatorname{sen} t, \qquad D_r(t) = B_r'(t).$$

Sea $\mathcal{R}(r)$ el número de raíces (reales y complejas contando multiplicidades) de módulo menor que r, entonces cuando N es suficientemente grande y r no está cerca del módulo de alguna raíz se cumple con gran precisión

$$\mathcal{R}(r) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F_r(2\pi n/N).$$

Para ser más concretos, experimentemos con $P = x^3 - x^2 - x - 2$ cuyas raíces, 2, $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$; son una de módulo 2 y dos de módulo 1 (si sólo disponemos de una calculadora científica habitual, conviene tomar P de grado 2 o incluso 1). Se tiene

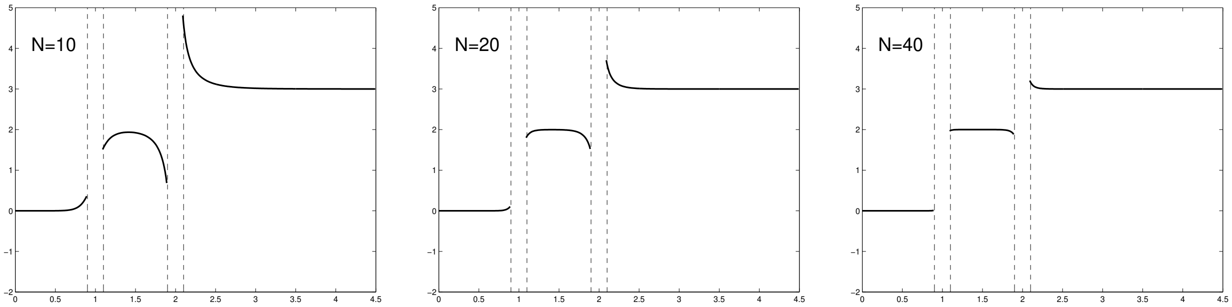
$$A_r(t) = r^3\cos(3t) - r^2\cos(2t) - r\cos t - 2, \qquad C_r(t) = 3r^3 \operatorname{sen}(3t) - 2r^2 \operatorname{sen}(2t) - r \operatorname{sen} t,$$
$$B_r(t) = r^3 \operatorname{sen}(3t) - r^2 \operatorname{sen}(2t) - r \operatorname{sen} t, \qquad D_r(t) = 3r^3\cos(3t) - 2r^2\cos(2t) - r\cos t.$$

La aproximación anterior con $N = 10$ para algunos valores semienteros de r es

$\mathcal{R}(0'5) \approx 0'0010,\ \mathcal{R}(1'5) \approx 1'9227,\ \mathcal{R}(2'5) \approx 3'1202,\ \mathcal{R}(3'5) \approx 3'0037,\ \mathcal{R}(4'5) \approx 3'0003;$

y los resultados exactos son $\mathcal{R}(0'5) = 0,\ \mathcal{R}(1'5) = 2,\ \mathcal{R}(2'5) = \mathcal{R}(3'5) = \mathcal{R}(4'5) = 3.$

Si podemos representar gráficos en un ordenador es interesante comprobar que eliminando pequeños entornos alrededor de los valores en los que se produce un cambio en el número de raíces, $|r-1|<\epsilon$, $|r-2|<\epsilon$; $N^{-1}\sum F_r(2\pi n/N)$ converge uniformemente a la función escalonada $\mathcal{R}(r)$ cuando N crece.



La explicación: Nótese que $N^{-1}\sum F_r(2\pi n/N)$ no es más que una suma de Riemann de $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} F_r(t)\,dt$ que vamos a probar que coincide con $\mathcal{R}(r)$.

Como $P(re^{it}) = A_r(t) + iB_r(t)$ donde $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, se cumple

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\frac{(D_r+iC_r)(A_r-iB_r)}{(A_r+iB_r)(A_r-iB_r)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\frac{P'(re^{it})re^{it}}{P(re^{it})}\,dt.$$

El cociente $P'(z)/P(z)$ admite una descomposición en fracciones simples $\sum c_j/(z-\lambda_j)$ donde λ_j recorre las raíces de P. Del límite $\lim_{z\to\lambda_j}(z-\lambda_j)P'(z)/P(z) = 1$ (nótese que $(P(z)-P(\lambda_j))/(z-\lambda_j)\to P'(\lambda_j)$), se sigue $c_j = 1$ y por tanto $P'(z)/P(z) = \sum 1/(z-\lambda_j)$. Sustituyendo en la fórmula anterior, basta probar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\frac{re^{it}}{re^{it}-\lambda_j}\,dt = 0 \quad \text{si } |\lambda_j|>r \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\frac{re^{it}}{re^{it}-\lambda_j}\,dt = 1 \quad \text{si } |\lambda_j|<r.$$

Sea el campo $\mathbf{F}(x,y) = (\beta-y, x-\alpha)/\big((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\big)$ con $\alpha = \operatorname{Re}\lambda_j$ y $\beta = \operatorname{Im}\lambda_j$. Al calcular la parte real en el integrando anterior, se comprueba que éste es justamente $\mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)$ con $\sigma(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t)$, así que las integrales anteriores son $\int_\sigma \mathbf{F}$. Sea $D = \overline{B}_r(\mathbf{0})$. Si $(\alpha,\beta)\notin D$ (esto es, si $|\lambda_j|>r$) entonces $\mathbf{F}$ es C^1 en D y conservativo, ya que $\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y$, con lo cual $\int_\sigma \mathbf{F} = 0$. Por otra parte, si (α,β) es interior a D, sea $D' = B_\epsilon(\alpha,\beta)\subset D$. Al aplicar el teorema de Green en $D-D'$ se tiene

$$0 = \int_{D-D'}\Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\Big) = \int_{\partial(D-D')}\mathbf{F} = \int_{\partial D}\mathbf{F} - \int_{\partial D'}\mathbf{F} = \int_\sigma \mathbf{F} - 2\pi$$

donde la última igualdad se reduce a un cálculo muy sencillo usando la parametrización de $\partial D'$ (con la orientación positiva) dada por $t\mapsto(\epsilon\cos t+\alpha, \epsilon\operatorname{sen} t+\beta)$. Por tanto $(2\pi)^{-1}\int_\sigma \mathbf{F} = 1$ en este caso, y la prueba queda completada.

De Torricelli a Bernoulli

Material:

- Una servilleta de papel.
- Un lápiz.
- Una sartén lo más amplia posible.
- Una pajita de refresco articulada o un tubo flexible de goma.
- Un reloj con segundero o cronómetro.
- Un vaso.

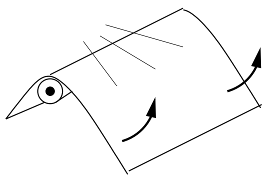
Objetivos: Comprobar experimentalmente el teorema de Bernoulli en hidrodinámica y deducirlo a partir de las ecuaciones de Euler.

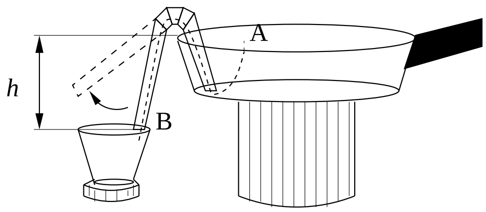
Los experimentos: Describiremos dos experimentos bien distintos en apariencia pero que comparten el mismo fundamento teórico.

El primero es realmente sencillo y aun así sorprendente. Sujetemos con los dedos la servilleta de papel paralelamente a una de sus aristas, y cerca de ella, a lo largo del lápiz; de manera que el resto de la servilleta caiga ligeramente con respecto a la horizontal por su propio peso.

Si soplamos perpendicularmente al lápiz en la dirección tangencial a la superficie de la servilleta, cabría esperar que ésta cayese todavía más por la fuerza del aire, sin embargo en contra de toda intuición la servilleta asciende levemente.

El segundo experimento es más complejo y cuantitativo. Llenemos la sartén con agua y pongámosla sobre algún soporte que la mantenga a cierta altura. Adosemos la pajita articulada o el tubo a la sartén de manera que un extremo esté sumergido hasta el fondo y el otro (el más largo) asome por fuera a modo de sifón. Para que no se mueva podemos solicitar la ayuda de alguien o utilizar una pinza que oprima muy poco. Aspirando por la pajita se consigue que el agua comience a salir y caiga en un vaso colocado justo a continuación y de capacidad despreciable en comparación con la de la sartén.



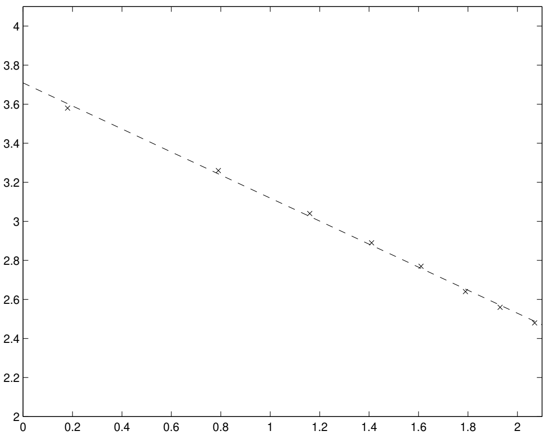


Inclinando la pajita o moviendo el tubo podemos hacer que varíe la diferencia de alturas, h, entre la superficie del agua de la sartén y el orificio de salida de la pajita. Si con ayuda del reloj (y quizá de una calculadora) hallamos el logaritmo del tiempo T que tarda en llenarse y rebosar en función del logaritmo de h para unos cuantos valores, resulta que al representar los puntos correspondientes, éstos se sitúan aproximadamente en una recta cuya pendiente está cercana a $-1/2$.

Por ejemplo, en un experimento real se obtuvo la tabla

$$\begin{array}{lllllllll} \log h \to & 2'07, & 1'93, & 1'79, & 1'61, & 1'41, & 1'16, & 0'79, & 0'18 \\ \log T \to & 2'48, & 2'56, & 2'64, & 2'77, & 2'89, & 3'04, & 3'26, & 3'58 \end{array}$$

que está aproximada por la recta $y = -0'59x + 3'71$ con un error que típicamente es del orden de una centésima.



La explicación: Supongamos que tenemos un fluido *estacionario*, es decir, en el que el campo de velocidades no varía con el tiempo (éste es el caso en nuestros experimentos si soplamos a ritmo constante o si despreciamos el descenso del nivel del agua de la sartén). Entonces en las ecuaciones de Euler se tiene $\partial \mathbf{V}/\partial t = \mathbf{0}$ y usando la identidad $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} = (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \times \mathbf{F} + \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{F}\|^2)$, mencionada al final del capítulo, y multiplicando escalarmente por $\mathbf{V}$, se llega a

$$\mathbf{V} \cdot \nabla(\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + p + f_{\text{ext}}) = 0.$$

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una *línea de corriente*, es decir, la trayectoria seguida por una partícula del fluido. Se cumple $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ y por la regla de la cadena el primer miembro de la igualdad anterior es la derivada de $\frac{1}{2}\|\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))\|^2 + p(\mathbf{x}(t)) + f_{\text{ext}}(\mathbf{x}(t))$, de donde se concluye el llamado *teorema de Bernoulli*:

$$\boxed{\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + p + f_{\text{ext}} \quad \textit{es constante en cada línea de corriente.}}$$

Este resultado explica ambos experimentos.

Consideremos en el primero una partícula de aire impelida por nuestro soplido. Cuando está cerca de la servilleta tendrá cierta velocidad v_1 y se irá frenando hasta quedar prácticamente en reposo y bajo la acción de la presión atmosférica, $v_2 = 0$, $p_2 = p_{\text{atm}}$. La fuerza de la gravedad actúa igual en ambos puntos, por tanto

$$\frac{1}{2}v_1^2 + p_1 + f_{\text{ext}} = \frac{1}{2}v_2^2 + p_2 + f_{\text{ext}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}v_1^2 + p_1 = p_{\text{atm}}.$$

Como $v_1^2 > 0$, necesariamente $p_1 < p_{\text{atm}}$. Es decir, hay una disminución de la presión en la cara de la servilleta por la que soplamos, lo que explica que se eleve (la presión superior no compensa a la inferior).

En el segundo experimento el agua que está más arriba va empujando a la de debajo, con lo cual es natural suponer que las líneas de corriente conectan un punto A situado en la superficie del agua de la sartén, con un punto B en el orificio de salida. Por la gran capacidad de la sartén podemos suponer que el nivel del agua no se modifica significativamente al llenarse el vaso y se tiene $v_A = 0$. Por otra parte, tanto en A como en B la presión que actúa es la atmosférica (el líquido no está "comprimido"), $p_A = p_B = p_{\text{atm}}$. Recordando que el potencial gravitatorio en la superficie de la Tierra es proporcional a la altura ($E_P = mgH$), se tiene que

$$\frac{1}{2}v_A^2 + p_A + f_{\text{ext A}} = \frac{1}{2}v_B^2 + p_B + f_{\text{ext B}} \;\Rightarrow\; v_B^2/h = \text{cte.}$$

De hecho la constante es $2g$, con lo cual el agua sale con la misma velocidad que alcanza un objeto soltado en caída libre desde altura h al transformar su energía potencial en cinética (*Teorema de Torricelli*, nótese que $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$). Por otra parte, dicha velocidad es inversamente proporcional al tiempo que tarda en llenarse el vaso (aunque la relación entre velocidad y flujo no es tan fácil como pudiera pensarse porque inicialmente las velocidades no son todas perpendiculares a la sección de la pajita). Es decir, $hT^2 = \text{cte}$ y tomando logaritmos se obtiene que $\log T$ depende linealmente de $\log h$ con pendiente $-1/2$.

Es difícil obtener mucha precisión en este experimento porque en todo este argumento hemos supuesto que el agua no tiene viscosidad, lo cual es sólo una primera aproximación.

Apéndice: Exámenes de cursos anteriores

En la euforia nerviosa que antecede y subsigue a los exámenes se suele comentar lo difícil o lo fácil que ha sido en comparación con tal o cual convocatoria anterior. Sin embargo, si uno pudiera juzgarlo con objetividad, vería que hay asignaturas que año tras año, para mal o para bien, tienen el mismo examen con problemas *isomorfos*. Muchas veces la presunta dureza de un profesor en un curso sólo indica lo poco que lo hemos entendido, sobre todo en asignaturas con diferentes grupos y exámenes comunes.

Aquí se incluye la prueba que avala esta opinión. Excepto el primer problema del primer examen que es más original y difícil, el resto responden a las mismas líneas. Además este apéndice puede servir como oráculo fidedigno para estimar la calificación. Para ello lo mejor es no leer ninguno de los enunciados siguientes antes de haberse estudiado todo el temario. Si en condiciones parecidas a las de un examen real (insomnio, nervios, mala calidad ambiental) se resuelven correctamente la inmensa mayoría de los apartados de los problemas correspondientes a uno de los modelos aquí incluidos, entonces es bastante posible (casi seguro) que la calificación será mayor que *aprobado*. En caso contrario no quiere decir que sea *suspenso*, sino que hay que estudiar más antes de que llegue el día del examen. Suerte.

A.1. Enunciados

En todos los casos se ha conservado la notación original aunque no corresponda a la empleada habitualmente en estas notas.

Examen 1

---

1. Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right| \le 1/2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow (x + h(x,y), y). \end{aligned}$$

a) Probar que para todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f admite una inversa local de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de (x_0, y_0).

b) Probar que f es inyectiva.

c) Probar que f es sobreyectiva.

2. Sea
$$M = \big\{(t\cos\theta - \operatorname{sen}\theta, t\operatorname{sen}\theta + \cos\theta, -t) \ : \ t \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi]\big\}.$$

a) Encontrar una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $M = F^{-1}(0)$.

b) Probar que M es una subvariedad de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$.

c) Esbozar M.

d) Hallar el espacio tangente $T_{(0,1,0)}M$.

3. Calcular la integral (curvilínea) de trayectoria

$$I = \int_C \sqrt{2y^2 + z^2}\, ds$$

donde C es la intersección de las superficies

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}, \qquad a > 0 \\ S_2 &= \{(x, y, z) \ : \ x = y\} \end{aligned}$$

cuyo sentido de recorrido es tal que su proyección sobre el plano $x = 0$ es recorrida en sentido positivo (en contra del movimiento de las agujas del reloj).

4. Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (2x^2 + y^2 + z^2, 2y^2 + x^2 + z^2, 2z^2 + x^2 + y^2)$. Calcular la integral de ese campo sobre la superficie S, con orientación exterior, siendo S la superficie que acota la región del espacio

$$\begin{aligned} \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4z,\ 0 \le z \le 1\} \cup \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le (z - 3)^2,\ 1 \le z \le 3\}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Examen 2}}$

1. Demostrar que el sistema

$$2x^2 + u + y = 0$$
$$2xz + x - z = 0$$

define a x e y como funciones $\mathcal{C}^\infty$ de z y u en un entorno del origen. Si estas funciones son $x = f(z,u)$, $y = g(z,u)$, demostrar que $G = (f,g)$ es invertible en un entorno del punto $(0,0)$.

2. a) Demostrar que el elipsoide

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

(donde a, b, $c > 0$) es una subvariedad de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ (es decir, es una 2-variedad en $\mathbb{R}^3$).

b) Demostrar que el conjunto N de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de las rectas $y = x$ e $y = -x$ no es una subvariedad de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$.

3. a) Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 6x\}$. Orientamos C en sentido contrario a las agujas del reloj. Se pide calcular

$$\int_C x^2\,dx + x\,dy$$

de dos formas: directamente y usando el teorema de Green.

b) Demostrar que el campo $F(x,y,z) = f(x,y,z)(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k})$ es ortogonal a su rotacional.

4. Sean

$$S_1 = \{(x,y,3x^2+3y^2) \,:\, x^2+y^2 \le 1\},$$
$$S_2 = \{(x,y,g(x,y)) \,:\, x^2+y^2 \le 1\} \qquad \text{y}$$
$$S = S_1 \cup S_2,$$

donde g es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que $g(x,y) = 3$ si $x^2+y^2 = 1$ y $g(x,y) > 3$ si $x^2+y^2 < 1$. Consideramos el campo $F(x,y,z) = (x,y,-2z)$. En S consideramos la orientación exterior, en S_1 la que corresponde al vector normal cuya tercera componente es negativa y en S_2 el vector normal con tercera componente positiva. Se pide

a) Enunciar el teorema de la divergencia de Gauss.

b) Hallar $\int\int_S F\overline{dS}$.

c) Hallar $\int\int_{S_1} F\overline{dS}$ e $\int\int_{S_2} F\overline{dS}$.

$\boxed{\text{EXAMEN 3}}$

---

1. Sea $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2-z^2 = 0\,,\ x+3y-z = 10\}$.

a) Demuestra que C es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1.

b) Prueba que existe un entorno abierto, W, del punto $(3,4,5)$ y dos funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$, α, $\beta : [5-\epsilon, 5+\epsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $C \cap W$ es una curva descrita paramétricamente como $x = \alpha(z)$, $y = \beta(z)$.

c) Halla $\frac{\partial\alpha}{\partial z}(5)$ y $\frac{\partial\beta}{\partial z}(5)$.

d) Halla el vector tangente a C en el punto $(3,4,5)$.

2. Sean $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2 \leq 3-2z\}$ y F la función $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^4$. Calcula los valores máximo y mínimo (absolutos) de $F_{|A}$.

3. Sea F el campo

$$F(x,y,z) = \left(\frac{axy}{z^2+1}, \frac{bx^2}{z^2+1}, \frac{1-z^2+cx^2yz}{(z^2+1)^2}\right).$$

a) Determina las condiciones que han de cumplir las constantes a, b y c para que la exista una función f de clase $\mathcal{C}^\infty$ cuyo gradiente sea F.

b) Determina f en el caso $a = 2$. Nota: $\displaystyle\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + K.$

c) Supuestas cumplidas las condiciones del apartado a), calcula la integral de F, cuando $c = -2$, a lo largo de la curva parametrizada como $x = t$, $y = t^2$, $z = t + 1$ cuando t varía entre 0 y 1.

4. Comprueba el teorema de Stokes para el campo vectorial $F(x, y, z) = z\overline{i} + x\overline{j} + y\overline{k}$ y para las siguientes superficies:

a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z = 1 \;\, z \geq 0\}$.

b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\, z \leq 0\}$.

c) $S = S_1 \cup S_2$.

Examen 4

1. Determina los valores de a para los que el sistema

$$\begin{aligned} xz^3 + yu + ax &= 1 \\ 2xy^3 + u^2 z + a(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

define a (x, y) como función implícita de (z, u) en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$. Si denotamos dicha función por $(x, y) = G(z, u)$, calcula los valores de a para los que la función G admite una inversa local de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(0, 1)$.

2. Sea $H = \{(x, y, z) = (s\cos t, s \operatorname{sen} t, s^4 + s) \, : \, 1 < s < 2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

a) Demuestra que H es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

b) Sea $L = H \cap \{(x, y, z) \, : \, x = y\}$. Prueba que L es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1.

3. Sean F el campo $F(x, y, z) = (2x\cos y, -x^2 \operatorname{sen} y - e^z, -ye^z + 1)$ y $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una trayectoria $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ y $\gamma(1) = (1, \pi, 2)$. Comprueba que F es un campo conservativo y calcula una función f cuyo gradiente sea F. Calcula $\int_\gamma \overline{F}\, d\overline{s}$.

4. Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ y sea S la esfera con centro en el origen y radio 1.

a) Calcula la integral de superficie del campo F con la normal interior sobre la superficie S_1 formada por los puntos de S que verifican $z \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Calcula la integral de superficie del campo F sobre la superficie S_2 correspondiente a la parte del plano $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ comprendida dentro del volumen limitado por S, con la normal apuntando hacia arriba.

c) Calcula el volumen limitado por las superficies S_1 y S_2 (o bien aplicando el teorema de la divergencia de Gauss o bien mediante una integral triple).

Examen 5

1. Considérese $M = S_1 \cap S_2$, donde S_1 y S_2 son los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos mediante las ecuaciones

$$S_1: \quad x^2 + y^2 = 1 + z^2\,, \qquad\qquad S_2: \quad z = y^3\,.$$

a) Representar gráficamente S_1 y S_2.

b) Demostrar que M es una subvariedad 1-dimensional (curva regular) de $\mathbb{R}^3$.

c) Hallar la recta tangente a M en $\mathbf{p} = (1, -1, -1) \in M$.

d) Demostrar que, localmente alrededor de $\mathbf{p}$, M se puede parametrizar en la forma $\alpha(t) = (t, y(t), z(t))$ con funciones $y = y(t)$ y $z = z(t)$ definidas para valores de t en un entorno de 1. Hallar el vector $\alpha'(1)$.

2. Hallar el máximo absoluto de la función $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \log(x + y) + \log(y + z) + \log(z + x)\,,$$

en el plano $x + y + z = k$ con $k > 0$. Utilizar el resultado para demostrar que para cualesquiera $x, y, z > 0$ se cumple

$$27\,(x + y)\,(y + z)\,(z + x) \leq 8\,(x + y + z)^3\,.$$

3. Hallar el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F}(x, y) = \big(\operatorname{sen}(xy) + x\,y\cos(xy), x^2\,\cos(xy)\big)$$

a lo largo de

a) la curva C determinada por $|x| + |y| = \pi$, orientada positivamente. Representar gráficamente C.

b) el arco Γ de la parábola $x = y^2$, recorrido desde $y = \sqrt{\pi}$ hasta $y = 0$. Representar gráficamente Γ.

4. Calcular el flujo del campo

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(1 + \|\vec{r}\|^{-3}\right)\vec{r}$$

con $\vec{r} = (x, y, z)$, a través de la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ con la normal exterior.

Examen 6

---

1. Sea $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de componentes $G = (G_1, G_2, G_3)$ definidas como

$$\begin{aligned} G_1 &= \operatorname{sen}(x-y) + \cos(x\,y + z) - e^{y+z}\,, \\ G_2 &= \cos x - x\,y + \operatorname{sen}(y+z) - e^{z}\,, \\ G_3 &= x^2 + y^2 + z^2 - (2+x)\,z\,. \end{aligned}$$

a) Demostrar que existe una función $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, con $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ y de modo que

$$G(F(x,y,z)) = (x,y,z)\,, \qquad \text{en cada } (x,y,z) \in \mathcal{U}\,.$$

b) Considérese F como campo vectorial definido en $\mathcal{U}$. Hallar el valor de $\operatorname{div} F(\mathbf{0})$.

2. Demostrar que $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 5\,x^2 + 5\,y^2 - 6\,x\,y = 4\}$ define una subvariedad unidimensional (curva regular) en $\mathbb{R}^2$ y hallar la mínima distancia de sus puntos al origen de coordenadas.

3. Sea $\vec{F} = \left(z\,\cos(x+y+z) - 2\,y, e^{xyz}\operatorname{sen} z + x, e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2}\right)$. Calcular

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde $S=\{z\geq 0\}\cap\{x^2+y^2+z^2=1\}$ y la normal a S se escoge con la tercera coordenada no negativa.

4. Se corta la superficie $\mathcal{P}: z=x^2+y^2$ con los planos $z=1$ y $z=4$. Queda así determinado un sólido Ω cuya frontera tiene dos caras planas S_1 y S_4 y una superficie lateral

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2+y^2\,,\ 1\leq z\leq 4\}\,.$$

a) Representar gráficamente Ω.

b) Calcular el área de la superficie lateral S.

c) Hallar el flujo del campo

$$\vec{F}(x,y,z)=\big(x\,y^2+z^2, x^2\,y+z^2, z\,(x^2+y^2)\big)$$

a través de la frontera de Ω en dirección hacia el exterior.

A.2. Soluciones

A modo de advertencia: Si uno mira las soluciones de un ejercicio antes de haberlo intentado con todas sus fuerzas, ha perdido la posibilidad de comprobar cuánto sabe.

Examen 1

---

1. a) Basta comprobar que estamos en las hipótesis del teorema de la función inversa

$$\det f'(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1+\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)\geq 1-\frac{1}{2}>0.$$

Por tanto no se anula.

b) Por definición, f es inyectiva si $f(x,y)=f(\widetilde{x},\widetilde{y})\ \Rightarrow\ (x,y)=(\widetilde{x},\widetilde{y})$.

Examinando las segundas coordenadas en la ecuación $f(x,y)=f(\widetilde{x},\widetilde{y})$, se tiene que $y=\widetilde{y}$ mientras que las primeras conducen a

$$x-\widetilde{x}=h(x,y)-h(\widetilde{x},y).$$

Por el teorema del valor medio el segundo miembro es $\frac{\partial h}{\partial x}(\xi,y)\cdot(x-\widetilde{x})$ y por la hipótesis del enunciado $|x-\widetilde{x}|\leq\frac{1}{2}|x-\widetilde{x}|$, de donde $x=\widetilde{x}$.

c) Hay que probar que para cada $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ la ecuación

$$\begin{cases} x + h(x,y) = & u_0 \\ y = & v_0 \end{cases}$$

tiene solución $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como $y = v_0$ se obtiene directamente sólo hay que demostrar que la ecuación $x = u_0 - h(x, v_0)$ tiene solución cualesquiera que sean $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Para ello consideramos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = u_0 - h(x, v_0)$. La función F es contractiva en $\mathbb{R}$ porque

$$|F(x) - F(x')| = |h(x, v_0) - h(x', v_0)| \leq \left|\frac{\partial h}{\partial x}(\xi, v_0)\right||x - x'| \leq \frac{1}{2}|x - x'|.$$

Así pues, por el teorema de la aplicación contractiva (en $\mathbb{R}$) se tiene que $x = F(x)$ tiene solución.

2. a) Si $(x, y, z) \in M$ entonces $x = t\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = t\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, $z = -t$. Esto es, $x = -z\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = -z\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$. Elevando al cuadrado para eliminar la dependencia en θ, comprobamos que esto equivale a

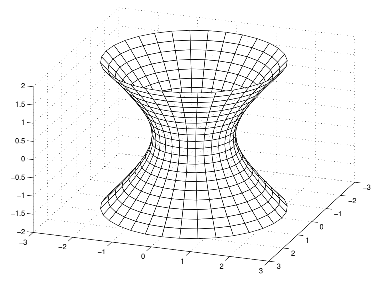
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = & (-z\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 + (-z\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 \\ = & z^2 + 1 \end{aligned}$$

(Esto es realmente una equivalencia: dados x, y y z satisfaciendo $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ uno puede encontrar un $\theta \in [0, 2\pi]$ de manera que x e y vengan dados por las expresiones anteriores. La explicación geométrica es que θ es el ángulo que hay que girar $(-z, 1)$ para que dé (x, y). Es un simple ejercicio comprobarlo).

Por tanto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, y $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ es la función buscada.

b) Con F como en el apartado anterior se tiene $\nabla F = (2x, 2y, -2z)$ que sólo se anula en el origen, el cual no pertenece a M. Como $k = \operatorname{rg} DF = 1$ y $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ con $n + k = 3$, se tiene que es una subvariedad de dimensión $n = 2$.

c) Para cada z fijo $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ define una circunferencia centrada cuyo radio va creciendo desde $z = 0$ (radio 1) hasta $z \to \infty$ (radio$\to \infty$). La ecuación es invariante por el cambio $z \mapsto -z$, así pues debe ser simétrica con respecto al plano $\{z = 0\}$. Con esto basta para hacer un dibujo aproximado, pero podemos notar además que al pasar a cilíndricas no depende del ángulo, con lo cual es una superficie de revolución y como el corte con $y = 0$ es una hipérbola equilátera (en la posición habitual) es el resultado de girarla alrededor del eje Z.



d) Según sabíamos $T_{(0,1,0)}(M) = \operatorname{Ker} DF$ con lo cual

$$T_{(0,1,0)}(M) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \nabla F(0,1,0) \cdot \mathbf{v} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = 0\}$$

(véase el cálculo del gradiente en el segundo apartado).

3. Nótese que $S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2y^2 + z^2 = a^2,\ x = y\}$. Por tanto

$$I = \int_C \sqrt{a^2}\, ds = a \int_C ds = a \operatorname{long}(C).$$

La curva es la intersección de una superficie esférica, S_1, de radio a con un plano, S_2, que pasa por su centro, el origen; así pues C es una circunferencia de radio a obteniéndose $I = a \cdot 2\pi a = 2\pi a^2$.

Otra forma más convencional, pero menos breve de llegar al resultado es considerar la parametrización $\sigma(t) = (\frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, a \operatorname{sen} t)$. La orientación en este problema es indiferente porque la integral es escalar.

4. Nótese que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde Ω_1 es la región sólida limitada por el paraboloide $z = (x^2 + y^2)/4$ y el plano $z = 1$, y Ω_2 es el interior del cono de vértice $(0,0,3)$ y base el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ con $z = 1$. Las dos regiones están adosados a través de dicho círculo.

Por el teorema de la divergencia

$$\int_S \mathbf{F} = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \mathbf{F} + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

La región Ω_1 se describe en coordenadas cilíndricas como $1 > z \geq r^2/4$, $0 \leq r \leq 2$,

$0 \leq \theta < 2\pi$. Por consiguiente

$$\int_{\Omega_1} \operatorname{div} \mathbf{F} = 4\int_{\Omega_1} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 4\int_0^2 \int_{r^2/4}^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta + z) r\,d\theta\,dz\,dr,$$

donde el factor r es el jacobiano del cambio a cilíndricas. Después de integrar con respecto de θ la integral resulta ser muy sencilla:

$$8\pi \int_0^2 \int_{r^2/4}^1 rz\,dz\,dr = 8\pi \int_0^2 r\Big(\frac{1}{2} - \frac{r^4/16}{2}\Big)dr = 8\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

De la misma forma integramos en Ω_2 que en cilíndricas viene dada por $r^2 \leq (z-3)^2$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta < 2\pi$, y como $1 \leq z \leq 3$, la primera ecuación se puede escribir como $r \leq 3 - z$, esto es, $1 \leq z \leq 3 - r$. Así pues

$$\int_{\Omega_1} \operatorname{div} \mathbf{F} = 4\int_{\Omega_1} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 4\int_0^2 \int_1^{3-r} \int_0^{2\pi} (r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta + z) r\,d\theta\,dz\,dr.$$

Procediendo como antes

$$8\pi \int_0^2 \int_1^{3-r} rz\,dz\,dr = 8\pi \int_0^2 r\Big(\frac{(3-r)^2}{2} - \frac{1}{2}\Big)dr = 4\pi \int_0^2 (8r - 6r^2 + r^3)dr = 16\pi.$$

Por tanto

$$\int_S \mathbf{F} = \frac{16\pi}{3} + 16\pi = \frac{64\pi}{3}.$$

Examen 2

---

1. Sea $F(x,y,z,u) = (2x^2 + u + y, 2xz + x - z)$. Por el teorema de la función implícita basta comprobar que el determinante jacobiano correspondiente a las variables x e y (las que queremos despejar) es no nulo en el origen. Al ser $F \in C^\infty$ también lo serán f y g.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x & 1 \\ 2z+1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[x=z=0]{} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En realidad se pueden hallar explícitamente las funciones f y g sin más que despejar, obteniéndose $x = z/(2z+1)$, $y = -u - 2z^2/(2z+1)^2$. Utilizando estas fórmulas se tiene fácilmente

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{vmatrix} \underset{u=z=0}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

y G resulta ser invertible por el teorema de la función inversa. Este cálculo también se puede hacer sin las fórmulas para f y g, utilizando derivación implícita, esto es, derivando con respecto a z y u después de sustituir $x = f(z,u)$, $y = g(z,u)$. Con ello se obtiene $4x\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$ y otras tres ecuaciones de las que se pueden despejar las parciales de f y g llegando al determinante escrito anteriormente.

2. a) Se puede escribir $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, f(\mathbf{x}) = 0\}$ con $f(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1$. Según la definición de subvariedad basta demostrar que el rango de Df es máximo (en este caso 1) en todo punto de M. Esto es evidente porque $\nabla f = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$ sólo se anula en el origen, que no es un punto de M. El rango coincide con la codimensión y por tanto la dimensión es $3 - 1 = 2$.

b) Si fuera una subvariedad de dimensión 1 se tendría $N \cap \mathcal{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \, : \, f(\mathbf{x}) = 0\}$, donde $f \, : \overset{ab}{\subset} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\operatorname{rg} Df = 1$ para alguna bola en torno al origen $\mathcal{U} = B_\epsilon\big((0,0)\big)$ suficientemente pequeña. Como N es simétrica por el eje X e Y se debe tener $f(x,x) = f(x,-x) = f(-x,x) = 0$ en $\mathcal{U}$. Derivando estas igualdades y sutituyendo $x = 0$ se sigue fácilmente $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$ lo que contradice $\operatorname{rg} Df = 1$.

Otra forma un poco más ortodoxa de resolver el ejercicio es explicando que en ningún entorno del origen se puede escribir N como la gráfica de una función $x = x(y)$ ni de $y = y(x)$.

3. a) Completando cuadrados $x^2 + y^2 = 6x \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 3^2$, por tanto C es la circunferencia de radio 3 centrada en $(3,0)$. Podemos parametrizarla mediante

$$\sigma(t) = 3(3 + \cos t, \operatorname{sen} t)$$

que la recorre en sentido contrario a las agujas del reloj cuando t va de 0 a 2π. Por definición, para $\mathbf{F}(x,y) = (x^2, x)$

$$\begin{aligned} \int_\sigma \mathbf{F} &= \int_0^{2\pi} (3^2(3+\cos t)^2, 3(3+\cos t)) \cdot (-3\operatorname{sen} t, 3\cos t)dt \\ &= 9\int_0^{2\pi} (-3(3+\cos t)^2 \operatorname{sen} t + (3+\cos t)\cos t)dt \\ &= (9(3+\cos t)^3 + 27\operatorname{sen} t)\Big|_0^{2\pi} + 9\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt. \end{aligned}$$

Por la periodicidad, al sustituir 0 y 2π el término correspondiente se anula. Empleando $\cos^2 t = (1+\cos(2t))/2$ se obtiene

$$\int_\sigma \mathbf{F} = 9\pi.$$

Por otra parte, el teorema de Green aplicado al círculo, D, de radio 3 limitado por C, implica

$$\int_\sigma \mathbf{F} = \int_D \big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\big) dx\,dy = \int_D 1\,dx\,dy = A(D) = \pi\cdot 3^2 = 9\pi.$$

b) Calculando el rotacional con la fórmula habitual

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ af & bf & cf \end{vmatrix} = \big(c\frac{\partial f}{\partial y} - b\frac{\partial f}{\partial z}\big)\mathbf{i} + \big(a\frac{\partial f}{\partial z} - c\frac{\partial f}{\partial x}\big)\mathbf{j} + \big(b\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y}\big)\mathbf{k}.$$

Efectuando el producto escalar se obtiene una suma en la que los términos se cancelan dos a dos

$$\big(ac\frac{\partial f}{\partial y} - ab\frac{\partial f}{\partial z}\big) + \big(ba\frac{\partial f}{\partial z} - bc\frac{\partial f}{\partial x}\big) + \big(cb\frac{\partial f}{\partial x} - ca\frac{\partial f}{\partial y}\big) = 0.$$

4. a) Basta pasar unas páginas atrás en estas notas.

b) La superficie S es una especie de "helado" en el que el cucurucho es un paraboloide y la forma de la bola está dada por g. Las orientaciones de S_1 y S_2 coinciden con la dada por la normal exterior en S. Si V es el cuerpo sólido acotado por S, por el teorema de la divergencia $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ simplemente porque $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.

c) Por lo dicho en el apartado anterior $\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$ así que basta con calcular la primera integral.

Escogiendo la parametrización $X(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha, 3r^2)$, $X : (0,1)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene $(\mathbf{F}\circ X)(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha, -6r^2)$ y

$$D_1X \times D_2X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 6r \\ -r\operatorname{sen}\alpha & r\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = (-6r^2\cos\alpha, -6r^2\operatorname{sen}\alpha, r).$$

La normal no tiene la tercera componente negativa, por tanto debemos cambiar el signo obteniéndose

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\mathbf{F} \circ X)(r,\alpha) \cdot (D_1X \times D_2X)(r,\alpha)\, d\alpha\, dr = \int_0^{2\pi} \int_0^1 12r^3 dr\, d\alpha = 6\pi.$$

Y según hemos visto $\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ debe valer -6π.

Otra forma más breve de hacer este apartado consiste en aplicar el teorema de la divergencia para demostrar que, con las orientaciones adecuadas, las integrales en S_1 y en S_2 coinciden con la integral en el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 3$, la cual es muy sencilla.

Examen 3

---

1. a) Geométricamente está claro porque es la intersección de un cono con un plano oblicuo. Para demostrarlo analíticamente hay que comprobar que la diferencial de $f(x, y) = (x^2 + y^2 - z^2, x + 3y - z - 10)$ tiene rango dos (codimensión$= 2 \Rightarrow$ dimensión$= 1$)

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Examinemos el menor formado por la primera y la tercera columnas, éste es nulo si y sólo si $x = -z$, lo que sustituido en las ecuaciones implica $y = 0$, $x = 5$, $z = -5$. Pero en este punto el menor formado por ejemplo por la primera y la segunda columnas es no nulo. Es decir, en cualquier caso siempre hay un menor de orden dos no nulo y $\operatorname{rg} Df = 2$.

b) Basta comprobar que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita. Nótese que tomando ϵ suficientemente pequeño, se puede conseguir que $[5 - \epsilon, 5 + \epsilon]$ esté contenido dentro de cualquier entorno abierto dado de 5.

Considerando el determinante formado por las derivadas parciales de f respecto de x e y (las variables que se quieren despejar), se obtiene

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[(x,y,z)=(3,4,5)]{} \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

y estamos en las hipótesis adecuadas. Como $f \in C^\infty$ entonces $\alpha, \beta \in C^\infty$.

c) Derivando implícitamente en las ecuaciones con $x = \alpha(z)$, $y = \beta(z)$

$$\left.\begin{aligned} 2x\frac{\partial\alpha}{\partial z} + 2y\frac{\partial\beta}{\partial z} - 2z =& 0 \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} + 3\frac{\partial\beta}{\partial z} - 1 =& 0 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} 6\frac{\partial\alpha}{\partial z} + 8\frac{\partial\beta}{\partial z} =& 10 \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} + 3\frac{\partial\beta}{\partial z} =& 1 \end{aligned}\right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z}(5) = \frac{11}{5}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial z}(5) = -\frac{2}{5}.$$

d) Hay infinitos vectores tangentes, todos ellos proporcionales a $(11/5, -2/5, 1)$, ya que $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t), t)$ parametriza C en un entorno de $t = 5$ y su derivada en dicho punto es $(11/5, -2/5, 1)$ según el apartado anterior.

2. Aunque sea poco ortodoxo, la forma más rápida de resolver el problema no involucra los multiplicadores de Lagrange:

Obviamente el mínimo de F es $F(0,0,0) = 0$ (es suma de tres cuadrados). Por otra parte, como $0 \le x^2 + y^2 \le 3 - 2z - z^2 = (1-z)(z+3)$ se debe tener $z \in [-3, 1]$ y $x^2 + y^2 + z^4 \le 3 - 2z - z^2 + z^4$. La función $g(z) = 3 - 2z - z^2 + z^4$ es decreciente en el intervalo $[-3, 1]$ porque $g'(z) = -2 - 2z + 4z^3 = (z-1)((2z+1)^2 + 1) \le 0$; así pues $g(z) \le g(-3) = 81$. Por tanto $F\big|_A \le 81 = F(0,0,-3)$ y el máximo es 81.

Para resolver el problema utilizando multiplicadores de Lagrange escribamos $A = \mathcal{U} \cup M$ con $\mathcal{U}$ y M definidos como A pero reemplazando el menor o igual por desigualdad estricta en el primer caso y por igualdad en el segundo. Es evidente que $\mathcal{U}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ porque es un abierto, y M también lo es porque $\nabla g \ne \mathbf{0}$ en cada uno de sus puntos, donde $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 + 2z$.

En $\mathcal{U}$ no hay más condicionamiento que la imposición de que los extremos de F pertenezcan a $\mathcal{U}$. Procediendo por los métodos habituales

$$\nabla F = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0).$$

Por otra parte, en M la condición es $g(x,y,z) = 0$ y la regla de los multiplicadores de Lagrange lleva a

$$\left.\begin{aligned} 2x =& 2\lambda x \\ 2y =& 2\lambda y \\ 4z^3 =& 2\lambda(z+1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (\lambda - 1)x =& 0 \\ (\lambda - 1)y =& 0 \\ 2z^3 - \lambda(z+1) =& 0 \end{aligned}\right\}$$

Si $\lambda = 1$ la tercera ecuación implica $z = 1$ e imponiendo $g(x, y, z) = 0$ se obtiene $x = y = 0$. Si $\lambda \neq 1$, entonces directamente $x = y = 0$ y al sustituir en la condición $z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow z = -3$ (la otra raíz, $z = 1$, ya ha sido considerada y además no es compatible con $\lambda \neq 1$).

En definitiva, los únicos posibles puntos donde se pueden alcanzar extremos son $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -3)$. Como $0 = F(0, 0, 0) < F(0, 0, 1) < F(0, 0, -3) = 81$ necesariamente en el primero se alcanza un mínimo y en el último un máximo. (Nótese que al ser A compacto $F\big|_A$ alcanza obligatoriamente un máximo y un mínimo).

3. a) Basta imponer $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Con este fin se calculan las diferentes coordenadas del rotacional. La primera es

$$\begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{cx^2 z}{(z^2+1)^2} + \frac{2zbx^2}{(z^2+1)^2} = 0,$$

de donde $c = -2b$. La segunda coordenada es

$$\begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ F_1 & F_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = -\frac{2zaxy}{(z^2+1)^2} - \frac{2cxyz}{(z^2+1)^2} = 0,$$

de donde $a = -c$. Por último la tercera es

$$\begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2bx}{z^2+1} - \frac{ax}{z^2+1} = 0,$$

de donde $a = 2b$. Combinando las ecuaciones anterior se tiene que (a, b, c) debe ser de la forma $(2b, b, -2b)$, es decir, proporcional a $(2, 1, -2)$.

b) Según el apartado anterior $a = 2 \;\Rightarrow\; b = 1$, $c = -2$. Ahora hay que resolver la ecuación $\nabla f = F$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{z^2+1} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{x^2 y}{z^2+1} + g(y, z).$$

Utilizando este resultado

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{z^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(y, z) = h(z).$$

Y finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1 - z^2 - 2x^2 yz}{(z^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad h'(z) = \frac{1 - z^2}{(z^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad h(z) = \frac{z}{z^2+1} + K.$$

Con lo cual todas las f aceptables son

$$f(x,y,z) = \frac{x^2y+z}{z^2+1} + K.$$

c) Como hemos visto, $c=-2$ corresponde a $a=2$, $b=1$. El campo $\mathbf{F}$ es conservativo, así pues no importa el camino recorrido, solamente los extremos:

$$\int_C \mathbf{F} = \int_0^1 \mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_0^1 \nabla f(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)).$$

Y un cálculo prueba que $f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = f(1,1,2) - f(0,0,1) = 1/10$.

4. En todos los apartados usaremos $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (1,1,1)$, lo cual se reduce a un sencillo cálculo.

a) La ecuación $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, describe la parte superior de un paraboloide invertido. La frontera de S_1 es $\partial S_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2=1,\ z=0\}$ que puede ser parametrizada (en sentido positivo mirando desde arriba) como $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t\in[0,2\pi)$. De modo que

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} (0,\cos t,\operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t,0)dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2t))dt = \pi.$$

Por otra parte, S_1 puede parametrizarse como $X(r,\theta) = (r\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1-r^2)$, $r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi)$. La normal es

$$\frac{\partial X}{\partial r}\times\frac{\partial X}{\partial\theta} = (2r^2\cos\theta, 2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$$

que apunta hacia arriba ($r\geq 0$) y por tanto es coherente con la orientación positiva de ∂S_1. Así pues

$$\int_{S_1}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \int_0^1\int_0^{2\pi}(2r^2\cos\theta + 2r^2\operatorname{sen}\theta + r)d\theta\,dr = 2\pi\int_0^1 r\,dr = \pi$$

que coincide con el resultado anterior.

b) En este caso tenemos el hemisferio sur de la esfera unidad con lo cual $\partial S_2 = \partial S_1$ y la integral sobre esta frontera vuelve a dar π (considerando la orientación positiva mirando desde arriba). Parametrizando la semiesfera como

$$X(\theta,\phi) = (\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\theta), \quad \phi\in[0,2\pi),\ \theta\in[\pi/2,\pi];$$

se obtiene la normal

$$\frac{\partial X}{\partial\theta}\times\frac{\partial X}{\partial\phi} = (\cos\phi \operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}\theta \cos\theta).$$

Como apunta hacia abajo ($\theta\in[\pi/2,\pi] \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cos\theta < 0$) debemos cambiar el signo para que la orientación de ∂S_2 sea la inducida, con lo cual

$$\int_{S_2} \operatorname{rot}\mathbf{F} = -\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\phi \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta)d\phi\, d\theta$$

$$= -2\pi\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta = \pi$$

c) $S_1\cup S_2$ es una superficie cerrada, esto es, $\partial(S_1\cup S_2)=\phi$. Por otra parte, con la orientación de la normal exterior (hacia arriba en S_1 y hacia abajo en S_2)

$$\int_{S_1\cup S_2} \operatorname{rot}\mathbf{F} = \int_{S_1} \operatorname{rot}\mathbf{F} + \int_{S_2} \operatorname{rot}\mathbf{F} = \pi + (-\pi) = 0.$$

Examen 4

---

1. Sea $F(x,y,z) = (xz^3 + yu + ax - 12xy^3 + u^2z + a(y-1))$. El punto fijado verifica siempre la ecuación con lo cual no impone ninguna restricción sobre a. Según el teorema de la función implícita aplicado a F, debemos examinar el jacobiano correspondiente a las variables que queramos despejar:

$$\begin{vmatrix} z^3+a & u \\ 2y^3 & 6xy^2+a \end{vmatrix} \underset{\substack{x_0=y_0=0\\ y_0=u_0=1}}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2-2\neq 0 \ \Leftrightarrow\ a\neq\pm\sqrt{2}.$$

Por consiguiente, si $a\neq\pm\sqrt{2}$ existen $x=x(z,u)$, $y=y(z,u)$ que además serán C^∞ porque F también lo es.

Derivando implícitamente con respecto de z y u, se obtiene (nótese que por la regla de la cadena $F(\mathbf{r}(\mathbf{s}),\mathbf{s})=\mathbf{0}\Rightarrow D_{\mathbf{r}}F\,\mathbf{r}'+D_{\mathbf{s}}F=\mathbf{O}$ con $\mathbf{O}$ la matriz nula 2×2)

$$\begin{pmatrix} z^3+a & u \\ 2y^3 & 6xy^2+a \end{pmatrix} G' = -\begin{pmatrix} 3xz^2 & y \\ u^2 & 2ux \end{pmatrix} \quad \underset{\substack{x_0=y_0=0\\ z_0=u_0=1}}{\longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} G'(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando determinantes
$$(a^2-2)\det G'(0,1)=-1,$$
lo cual implica en particular que no existen $x=x(z,u)$, $y=y(z,u)$ diferenciables si $a=\pm\sqrt{2}$, porque en ese caso el primer miembro sería nulo y el segundo no. En el resto de los casos, $a\neq\pm\sqrt{2}$, G está en las hipótesis del teorema de la función inversa y existirá la inversa local deseada.

2. a) Cuando $1<s<2$, $0\le t\le 2\pi$, los puntos $(x,y)=(s\cos t, s\operatorname{sen} t)$ recorren la corona circular $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<2\}$ (simplemente es el cambio a polares). Además $z=s^4+s$ equivale a $z=(x^2+y^2)^2+\sqrt{x^2+y^2}$. Con lo cual se puede escribir

$$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\Omega,\ z=(x^2+y^2)^2+\sqrt{x^2+y^2}\}=\mathcal{U}\cap\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 : f(\mathbf{x})=0\}$$

con $\mathcal{U}$ el abierto $\Omega\times\mathbb{R}$ y $f(x,y,z)=z-(x^2+y^2)^2-\sqrt{x^2+y^2}$. La función f es C^1 cuando x e y no son simultáneamente nulos, lo cual claramente no puede ocurrir en H (porque $(0,0)\not\in\Omega$). Además obviamente $\operatorname{rg} Df=1$ porque ∇f tiene su tercera coordenada idénticamente uno. Por la definición, H es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de codimensión 1, o lo que es lo mismo, de dimensión 2.

b) Claramente $x=y\Leftrightarrow \cos t=\operatorname{sen} t$ (porque $s\neq 0$) y, empleando $\operatorname{sen}^2+\cos^2=1$, esto ocurre si y sólo si $\operatorname{sen} t=\cos t=1/\sqrt{2}$ o $\operatorname{sen} t=\cos t=-1/\sqrt{2}$ (que corresponden a $t=\pi/4$ o $t=5\pi/4$). Por consiguiente

$$L=\big\{(x,y,z)=(\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}},s^4+s) : 1<s<2\big\}\cup\big\{(x,y,z)=(-\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{s}{\sqrt{2}},s^4+s) : 1<s<2\big\}.$$

Claramente $\sigma_1(s)=(s/\sqrt{2},s/\sqrt{2},s^4+s)$ y $\sigma_2(s)=(-s/\sqrt{2},-s/\sqrt{2},s^4+s)$ cumplen $\operatorname{rg} D\sigma_1=\operatorname{rg} D\sigma_2=1$, son homeomorfismos sobre su imagen (se invierten con $(x,y,z)\mapsto\sqrt{2}\,x$ y $(x,y,z)\mapsto-\sqrt{2}\,x$ que son continuas), y verifican $\operatorname{Im}\sigma_1=\mathcal{U}_1\cap L$, $\operatorname{Im}\sigma_2=\mathcal{U}_2\cap L$ con $\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2\supset L$, por ejemplo tomando $\mathcal{U}_1=\{x>0\}$, $\mathcal{U}_2=\{x<0\}$. Por tanto son parametrizaciones locales que cubren todos los puntos de L que, consecuentemente, es una subvariedad de dimensión uno.

3. El campo es C^1 en $\mathbb{R}^3$, con lo cual será conservativo si y sólo si su rotacional es el vector idénticamente nulo. Sin embargo si hallamos f tal que $\nabla f=\mathbf{F}$ ni siquiera será necesario hacer esa comprobación. Para encontrar el potencial f que satisface la ecuación anterior se comienza igualando las primeras coordenadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = x^2\cos y + g(y,z).$$

La igualdad de las segundas coordenadas implica ahora

$$-x^2\operatorname{sen} y + \frac{\partial g}{\partial y} = -x^2\operatorname{sen} y - e^z \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = -ye^z + h(z).$$

Por último, de igualar las terceras coordenadas

$$-ye^z + h'(z) = -ye^z + 1 \quad \Rightarrow \quad h(z) = z + K.$$

Con esto hemos probado que para cualquier constante, K, la función

$$f(x,y,z) = x^2\cos y - ye^z + z + K$$

verifica $\nabla f = \mathbf{F}$, con lo cual $\mathbf{F}$ es conservativo. Por otra parte

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (\mathbf{F}\circ\gamma)(t)\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = -\pi e^2 + 1.$$

4. a) Nótese que en S se puede escribir $\mathbf{F} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ (porque la esfera es de radio uno) que coincide con la normal unitaria $\mathbf{n}$. Si $\mathbf{N}$ es la normal interior empleando cierta parametrización, se puede escribir

$$\int_{S_1} \mathbf{F} = \int_\Omega \mathbf{n}\cdot\mathbf{N} = -\int_\Omega \|\mathbf{N}\| = -A(S_1)$$

donde $A(S_1)$ indica el área de S_1. Para calcular esta área lo más sencillo es emplear la parametrización dada por los ángulos en esféricas, $X = X(\theta,\phi)$, para la cual $\|\mathbf{N}\| = \operatorname{sen}\theta$ (esto se reduce a un cálculo o a un argumento geométrico). Simple trigonometría prueba que los puntos de S_1 con $z = -\sqrt{2}/2$ corresponden a $\theta = 3\pi/4$, así pues

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{3\pi/4} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 2\pi\big(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\big) \quad \Rightarrow \quad \int_{S_1} \mathbf{F} = -2\pi\big(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\big).$$

b) Al cortar S con $z = -\sqrt{2}/2$ queda en el interior el círculo $x^2+y^2 \le 1/2$, $z = -\sqrt{2}/2$ (porque $x^2+y^2+z^2 \le 1$ es la esfera sólida). Empleando la parametrización $X(x,y) =$

$(x, y, -\sqrt{2}/2)$ se tiene obviamente $D_1X \times D_2X = (0,0,1)$. Por tanto

$$\int_{S_2} \mathbf{F} = \int_{x^2+y^2\le 1/2} (\mathbf{F}\circ X)(x,y)\cdot(0,0,1)dx\,dy = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{x^2+y^2\le 1/2} 1\,dx\,dy = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

Donde en la última igualdad se ha usado el área del círculo.

c) Notando que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$, se tiene por el teorema de la divergencia

$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{1}{3}\int_V \operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{3}\int_{S_1\cup S_2}\mathbf{F} = \frac{1}{3}\big(2\pi(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\big) = \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Aquí se han usado los resultados de a) y b) con el signo cambiado para que la orientación sea positiva.

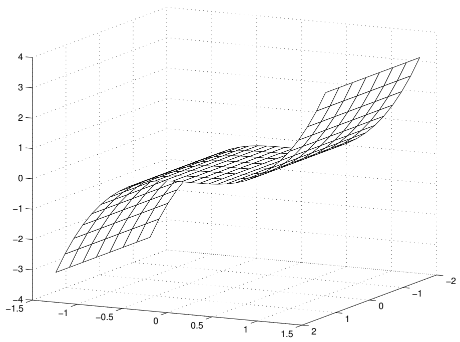
Si uno quiere resolver el problema directamente mediante integrales triples, lo más simple es emplear que la región de integración puede describirse en esféricas como $\big\{0\le r\le 1,\ 0\le\phi<2\pi,\ 0\le\theta\le 3\pi/4\big\}\cup\big\{0\le r\le\sqrt{2}/(2\cos(\pi-\theta)),\ 0\le\phi<2\pi,\ 3\pi/4\le\theta\le\pi\big\}$ (esto requiere sencillas explicaciones trigonométricas). Recordando que el jacobiano es $r^2\operatorname{sen}\theta$ y que $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V) =& \int_0^{2\pi}\int_0^{3\pi/4}\int_0^1 r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi + \int_0^{2\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{-\sqrt{2}/(2\cos\theta)} r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\ =&\frac{2\pi}{3}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) - \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\int_{3\pi/4}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi\sqrt{2}}{12}.\end{aligned}$$

Examen 5

1. a) La representación gráfica de S_1 está hecha en la solución del problema 2 c) del primer examen (véase allí el dibujo y los comentarios que llevan a él). Corresponde a girar la hipérbola equilátera usal por su eje vertical.

Para representar gráficamente S_2, nótese que los cortes con los planos $x =$cte dan lugar a la gráfica de la función $z = y^3$, así que basta copiar (trasladar) la gráfica en $\mathbb{R}^2$ de esta función cúbica a lo largo del eje X. El resultado es como una especie de tobogán ondulado que permite disminuir la altura según nos movemos en la dirección negativa del eje Y.



b) Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2-1, -y^3+z)$, entonces $M = F^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ y basta comprobar que DF tiene rango máximo (dos). En ese caso la codimensión será dos y por tanto la dimensión uno. La matriz jacobiana es

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 0 & -3y^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escogiendo los menores m_1 y m_2 determinados, respectivamente, por las columnas primera y tercera, y segunda y tercera, se tiene

$$m_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0, \qquad m_2 = 0 \Leftrightarrow 2y(1-3zy) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ó } 3zy = 1.$$

Así pues $\operatorname{rg} DF < 2$ sólo podría darse si $x = y = 0$ o si $x = 0$, $3zy = 1$. Ambos casos llevan a contradicción al imponer las ecuaciones que definen M:

$$x = y = 0 \underset{x^2+y^2=1+z^2}{\Rightarrow} 1 + z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{contr.}$$

$$x = 0,\ z = \frac{1}{3y} \underset{z=y^3}{\Rightarrow} y^4 = \frac{1}{3} \underset{y^2=1+z^2}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \text{contr.}$$

c) Los vectores tangentes $\mathbf{v}$ pertenecen al núcleo de $DF(\mathbf{p})$. Deben por tanto satisfacer (en la base canónica)

$$F'(\mathbf{p})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{esto es,} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Escribiendo $\mathbf{v} = (x,y,z)$ y resolviendo el sistema lineal resultante se obtiene $\mathbf{v} = \lambda(-2,1,3)$, es decir, $T_{\mathbf{p}}(M) = \mathcal{L}\big((-2,1,3)\big)$. Por tanto la recta tangente es

$$(x,y,z) = (1,-1,-1) + \lambda(-2,1,3).$$

d) Salvo cambiar t por x, el enunciado se traduce en que es posible despejar $y = y(x)$, $z = z(x)$ en $F(x, y, z) = \mathbf{0}$. Como $F \in C^\infty$ y $F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, todo lo que falta por comprobar para aplicar el teorema de la función implícita es que para $x = 1$ el jacobiano correspondiente a derivar con respecto a las variables y y z es no nulo en $\mathbf{p}$. Esto es un cálculo inmediato

$$\begin{vmatrix} 2y & -2z \\ -3y^2 & 1 \end{vmatrix} \underset{y=z=-1}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Con ello α satisface trivialmente las propiedades para ser parametrización local (es homeomorfismo sobre su imagen porque se puede invertir con $(x, y, z) \mapsto x$). Por ello, $\alpha'(1) \in T_{\mathbf{p}}(M)$ y según el apartado anterior necesariamente $\alpha'(1) = \lambda(-2, 1, 3)$ lo que igualando las primeras coordenadas lleva de $\lambda = -1/2$ y por tanto $\alpha'(1) = (1, -1/2, -3/2)$.

2. Obviamente $\{x + y + z = k\} \cap (\mathbb{R}^+)^3$ es una subvariedad, así que podemos aplicar la regla de los multiplicadores de Lagrange con $g(x, y, z) = x + y + z - k$. Para $x, y, z > 0$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+y)^{-1} + (z+x)^{-1} = \lambda \\ (x+y)^{-1} + (y+z)^{-1} = \lambda \\ (y+z)^{-1} + (z+x)^{-1} = \lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (z+x)^{-1} = (y+z)^{-1} \\ (x+y)^{-1} = (z+x)^{-1} \end{cases}$$

De aquí se obtiene $x = y$, $y = z$, que al sustituir en la condición implica $x = y = z = k/3$. El enunciado dice implícitamente que hay un máximo, así que debe alcanzarse en este punto y es $f(k/3, k/3, k/3) = 3\log(2k/3)$.

Según lo que acabamos de probar, $f(x, y, z) \leq 3\log(2k/3)$ para todo $x, y, z > 0$ que verifiquen $x + y + z = k$. Tomando exponenciales (e^x es creciente) se concluye

$$(x+y)(y+z)(z+x) = e^{f(x,y,z)} \leq e^{3\log(2k/3)} = (2k/3)^3 = \frac{8}{27}(x+y+z)^3,$$

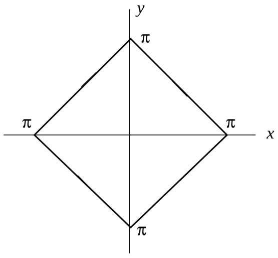
como se pedía demostrar.

3. En ambos apartados es relevante que el campo sea conservativo, lo cual se reduce a comprobar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy) = \frac{\partial P}{\partial y}$$

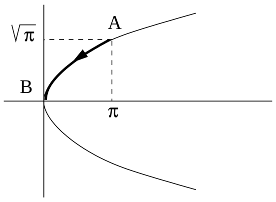
donde, como es habitual, se ha escrito P y Q para denotar F_1 y F_2.

a) La curva C está definida por $x+y=\pi$ en el primer cuadrante, $-x+y=\pi$ en el segundo cuadrante, $-x-y=\pi$ en el tercer cuadrante y por $x-y=\pi$ en el cuarto cuadrante. Representando estas rectas se tiene que C es el borde de un cuadrado girado 45º



Como $\mathbf{F}$ es conservativo y C es una curva cerrada simple, el trabajo es nulo.

b) El arco Γ es la porción de la parábola $x=y^2$ que va de $A=(\pi,\sqrt{\pi})$ hasta $B=(0,0)$



Si α parametriza Γ y f es un potencial para $\mathbf{F}$, $\nabla f=\mathbf{F}$, entonces

$$\int_\Gamma \mathbf{F}=\int(\mathbf{F}\circ\alpha)(t)\cdot\alpha'(t)dt=\int\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)=f(B)-f(A).$$

El potencial cumple

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2\cos(xy).$$

Integrando la segunda ecuación $f(x,y)=x\operatorname{sen}(xy)+g(x)$ y sustituyendo en la primera queda $f(x,y)=x\operatorname{sen}(xy)+\text{cte}$. Así pues

$$\int_\Gamma \mathbf{F}=f(0,0)-f(\pi,\sqrt{\pi})=-\pi\operatorname{sen}(\pi^{3/2}).$$

4. Por el teorema de la divergencia

$$\int_S \mathbf{F}=\int_B \operatorname{div}\mathbf{F}\qquad \text{con } B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 1\}$$

y $S = \partial B$ es la superficie del enunciado.

Obviamente

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{r} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = 3,$$

donde se ha empleado que la divergencia del campo $\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ es nula (si uno no lo recuerda de memoria, el cálculo no es difícil). Así pues

$$\int_S \mathbf{F} = 3 \int_B 1 = 3 \operatorname{Vol}(B) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 = 4\pi.$$

Examen 6

1. a) Basta demostrar que tiene inversa local en un entorno del origen. Según el teorema de la función inversa esto se reduce a comprobar $\det G'(\mathbf{0}) \neq 0$. Tras calcular las derivadas parciales (que no escribimos aquí para mayor brevedad), se obtiene

$$G'(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \det G'(\mathbf{0}) = -2 \neq 0.$$

b) De nuevo por el teorema de la función inversa sabemos que la matriz jacobiana en el origen de la inversa local es $(G')^{-1}(F(\mathbf{0})) = (G')^{-1}(\mathbf{0})$. El cálculo de la inversa es muy sencillo por ser una matriz triangular, obteniéndose

$$F'(\mathbf{0}) = (G')^{-1}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

De donde se sigue

$$\operatorname{div} F(\mathbf{0}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{0}) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{0}) + \frac{\partial F_3}{\partial x}(\mathbf{0}) = 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2. Sea $g(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 4$ de modo que $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, g(x,y) = 0\}$. El gradiente de g es $(10x - 6y, 10y - 6x)$, que sólo se anula en el origen, el cual no pertenece a M. Por tanto $\operatorname{rg} Dg = 1$ y M es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$ de codimensión 1. Consecuentemente la dimensión es también 1.

Si la distancia al origen, $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, se minimiza, su cuadrado también; por lo cual se puede aplicar la regla de los multiplicadores de Lagrange con $f(x,y)=x^2+y^2$ y g como antes, lo que da lugar al sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2x = \lambda(10x-6y) \\ 2y = \lambda(10y-6x) \\ 5x^2+5y^2-6xy=4 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por y, la segunda por x y restando, se obtiene $\lambda(x^2-y^2)=0$, lo que lleva a discutir tres casos: $\lambda=0$, $x=y$ y $x=-y$. El primero da lugar a una contradicción porque $\lambda=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)\notin M$. Al sustituir los otros dos en la última ecuación se obtienen cuatro puntos:

$$(1,1), \qquad (-1,-1), \qquad (1/2,-1/2), \qquad (-1/2,1/2).$$

El mínimo buscado se alcanzará en alguno o algunos de ellos. Al sustituir en la función distancia se tiene $d(\pm(1/2,-1/2)) < d(\pm(1,1))$. Por tanto $d(\pm(1/2,-1/2))=\sqrt{2}/2$ es la mínima distancia al origen.

El problema da por hecho que existe un mínimo, pero si hubiera que justificarlo, bastaría comprobar que M es compacto (es una elipse en posición oblicua).

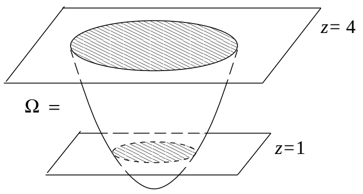
3. Como S es el hemisferio norte de S^2 (la superficie esférica unidad), ∂S es la circunferencia unidad en el plano XY, $\partial S=\{x^2+y^2=1,\ z=0\}$. La parametrización natural de ∂S es $\sigma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,0)$, $0<t<2\pi$. Con ella ∂S se recorre en sentido positivo cuando se mira desde arriba, y por tanto S tendrá la normal indicada en el enunciado. En definitiva, según el teorema de Stokes

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F} = \int_{\partial S}\mathbf{F} = \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(2\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t)\,dt.$$

Para calcular esta integral se pueden usar las fórmulas $\operatorname{sen}^2 t=(1-\cos(2t))/2$, $\cos^2 t=(1+\cos(2t))/2$. Como $\cos(2t)$ tiene promedio nulo en $[0,2\pi]$, se obtiene inmediatamente

$$\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F} = 2\pi\big(2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\big)=3\pi.$$

4. a) Es muy fácil darse cuenta que $\mathcal{P}$ es el paraboloide obtenido cuando la parábola típica $y=x^2$ gira por el eje vertical que pasa por su vértice y Ω no será más que la “rodaja” entre las alturas 1 y 4.



b) La superficie S se parametriza fácilmente mediante $X(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha, r^2)$ con $1 < r < 2$, $0 < \alpha < 2\pi$. El vector normal es

$$\mathbf{N} = D_1X \times D_2X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 2r \\ -r\operatorname{sen}\alpha & r\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2\cos\alpha, -2r^2\operatorname{sen}\alpha, r).$$

De aquí, $\|\mathbf{N}\| = \sqrt{4r^4 + r^2}$ y se tiene

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r(4r^2+1)^{1/2}dr = 2\pi \cdot \frac{(4r^2+1)^{3/2}}{8\cdot 3/2}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2}).$$

c) Por el teorema de la divergencia, con la normal indicada,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F} = 2\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

El sólido Ω se describe fácilmente en coordenadas cilíndricas como $0 \le r \le \sqrt{z}$, $0 \le \theta < 2\pi$, $1 \le z \le 4$. Con este cambio de variables la integral anterior se puede calcular fácilmente

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} = 2\int_1^4\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\,d\theta\,dr\,dz = 4\pi\int_1^4 \frac{z^2}{4}\,dz = 21\pi.$$

El problema también se puede resolver directamente con la fórmula para el área de una superficie de revolución, si uno la conoce.

Esperemos que quien llegue hasta aquí no sea porque haya agotado los seis modelos de examen al tiempo que las convocatorias. Si es así, debiera tener en cuenta que el resto de las asignaturas de la licenciatura son en su mayoría más difíciles que ésta.

Sea cual sea el resultado, no hay que perder de vista lo que debería ser evidente, y es que hay cosas muchísimo más importantes que los exámenes.

Ama y haz lo que quieras[*]

[*] Todas las citas son de San Agustín de Hipona. Las anteriores están tomadas de la edición de sus “Confesiones” de Pedro Rodríguez de Santidrián. Alianza Editorial H4409, Madrid 1999. Aprovecho estas últimas líneas para agradecer a Magdalena Walias el haberme facilitado material para el curso la primera vez que lo impartí, y a Carlos Vinuesa por indicarme muchas erratas y errores.