Soluciones del tercer parcial

1) Llamemos L al límite. Como $\lim_{x\to 0}(2-\cos^4 x)=1$, se puede escribir

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+\operatorname{sen}(ax))^3-\tan^3 x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\Big(\big(2+\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\big)^3-\frac{1}{\cos^3 x}\big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\big)^3\Big).$$

Por la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}=a$ y $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$. Por consiguiente $L=(2+a)^3-1$, que se anula si y sólo si $a=-1$.

2) Las únicas funciones no continuas que participan en f son la parte entera, que es discontinua en los enteros, y $1/x$, que lo es en cero. Por tanto los únicos posibles puntos de discontinuidad son *a*) los x con $1/x\in\mathbb{Z}$, *b*) $x=0$. Estudiémoslos por separado:

a) $1/x\in\mathbb{Z}$ equivale a $x=1/n$ con $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Fijado n, la función $1/x$ permanece acotada en un entorno acotado de $1/n$ (basta evitar el cero) y por tanto $x^2[1/x]$ también lo está. Como $\lim_{x\to 1/n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{x}=\operatorname{sen}(2\pi n)=0$, se sigue del teorema del bocadillo que $\lim_{x\to 1/n}f(x)=0$. Al ser $f(1/n)=n\operatorname{sen}(2\pi n)=0$, la función es continua en estos puntos.

b) Sabemos que $[1/x]=1/x-g(x)$ con $0\le g(x)<1$ (la parte fraccionaria). Así pues, para $x\ne 0$,

$$f(x)=x^2\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{x}-x^2g(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{x}=x\operatorname{sen}\frac{2\pi}{x}-x^2g(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{x}.$$

Como g y el seno permanecen acotados, se tiene, de nuevo por el teorema del bocadillo, $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ y f es continua en $x=0$.

En conclusión, f es continua en todo punto.

3) Si $x>0$

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}.$$

Si $x<0$

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

En $x=0$, aplicamos la definición de derivada:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2/(1+|h|)}{h}=\frac{h}{1+|h|}=\frac{0}{1}=0.$$

4) Hay que probar que bajo las hipótesis del enunciado, la ecuación $f(x)=x^3$ tiene solución en $[-1,1]$. Sea $g(x)=f(x)-x^3$. Esta función es continua (por serlo f) y como $-1\le f\le 1$, se tiene $g(-1)=f(-1)+1\ge 0$ y $g(1)=f(1)-1\le 0$. Por el teorema de Bolzano existe un $c\in[-1,1]$ tal que $g(c)=0$. Esto es $f(c)=c^3$.

Rogaría se me comunicase cualquier errata o error para su corrección. Gracias.

Fernando Chamizo