Soluciones del segundo parcial

1) Sea $\sum a_n$ la primera serie y $\sum b_n$ la segunda.

a) Podemos comparar con $\sum 1/n$ porque

$$\lim \frac{a_n}{1/n} = \lim \frac{n^2-n}{n^2-6n+17} = 1,$$

y como $\sum 1/n$ diverge (es la serie armónica), $\sum a_n$ también lo hace.

b) Se puede resolver de varias formas. Lo más sistemático (pero no lo más breve) es aplicar directamente el criterio del cociente. Operando:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\big/\big((n+1)!+(n+1)^2\big)}{n^n\big/(n!+n^2)} = \frac{(n+1)^n\big/(n!+n+1)}{n^n\big/(n!+n^2)}.$$

De modo que

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \big(1+\frac{1}{n}\big)^n \frac{n!+n^2}{n!+n+1} = \lim \big(1+\frac{1}{n}\big)^n \frac{1+n^2/n!}{1+n/n!+1/n!} = e\cdot 1 = e.$$

Como $e>1$, la serie diverge. (Nótese que $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \Rightarrow n^2/n! \to 0$).

2) Basta dar algún ϵ para el que no exista el δ del que nos habla la definición de límite. Sea por ejemplo $\epsilon = 0'1$ (otras elecciones son válidas). Si existiera un δ tal que

$$0<|x|<\delta \;\Rightarrow\; |\cos(1/x)| < 0'1 = \epsilon,$$

llegaríamos a una contradicción tomando por ejemplo $x = \frac{1}{2\pi N}$ con N un entero suficientemente grande de modo que $|x|<\delta$, ya que $|\cos(1/x)| = 1 > 0'1$.

3) *a*) Falso. Contraejemplo: $a_n = 1/n$. La serie $\sum 1/n$ diverge por ser la serie armónica pero $\lim \sqrt{n}/n = 0$.

b) Falso. Contraejemplo: $a_n = (-1)^n/n$. No se tiene convergencia absoluta ya que $\sum |a_n| = \sum 1/n$ que es de nuevo la serie armónica. Pero sí hay convergencia condicional por el criterio de Leibniz ($1/n$ es decreciente y tiende a cero).

4) En el primer metro la velocidad será 3, en el segundo 3^2, en el tercero $(3^2)^2 = 3^{2^2}$, en el cuarto $\big(3^{2^2}\big)^2 = 3^{2^3}$, y así sucesivamente. En general la velocidad durante el metro n-ésimo es $v_n = 3^{2^{n-1}}$. El tiempo que tarda en total será la suma de lo que tarda en recorrer cada metro= esp./vel $= 1/v_n$. Esto es,

$$T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{3^{2^{n-1}}}.$$

Así pues T_n es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum 3^{-2^{n-1}}$. Esta serie converge (por ejemplo por el criterio del cociente: $a_{n+1}/a_n = 3^{-2^n}3^{2^{n-1}} = 3^{-2^{n-1}} \to 0$) y, por definición, esto significa que la sucesión T_n es convergente, en particular está acotada.

Rogaría se me comunicase cualquier errata o error para su corrección. Gracias.

Fernando Chamizo