Soluciones e indicaciones: Hoja 1, problemas 14-23

14) Nota: La forma de resolver este ejercicio depende fundamentalmente de lo que se haya visto en la clase de teoría. En caso de duda pregúntese al profesor correspondiente.

Si $a_n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Esto se sigue de la definición de límite. En pocas palabras: si $(1+1/k)^k$ está a distancia ϵ de e para k grande, y a_n se hace tan grande como queramos, se puede tomar $k = a_n$. (Como ejercicio, uno puede practicar escribiendo esto todo lo rigurosamente que desee).

Si $\{a_n\} \not\subset \mathbb{Z}^+$, descomponemos cada término en sus partes entera y fraccionaria, digamos $a_n = e_n + f_n$. Evidentemente (basta pensarlo un momento, dos si se está con el día malo)

$$\left(1+\frac{1}{e_n+1}\right)^{e_n} \le \left(1+\frac{1}{e_n+f_n}\right)^{e_n+f_n} = \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{e_n}\right)^{e_n+1}.$$

O lo que es lo mismo:

$$\left(1+\frac{1}{e_n+1}\right)^{e_n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{e_n+1}\right) \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \left(1+\frac{1}{e_n}\right)^{e_n}\left(1+\frac{1}{e_n}\right).$$

El resultado se sigue por el *teorema del sandwich*[1] ("tomando límites en la desigualdad") y usando que sabemos el resultado para e_n y e_n+1 porque son sucesiones de naturales que tienden a infinito.

Indicación (para el segundo límite): Procédase como en el primer caso.

15) Manipulamos a_n y b_n para que den lugar a límites como los del ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{(2n^2-3)/n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^2 \\ b_n &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2+3} = \left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{(2n^2+3)/n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-2}. \end{aligned}$$

Por las propiedades de los límites, $\lim c_n = e^2 + 1/e^{-2} = 2e^2$.

16) Llevamos a cabo los dos pasos de inducción:

- Para $n = 1$ las desigualdades son igualdades.
- Si se cumple para n, multiplicando por $n+1$ se tiene

$$2^{n-1}(n+1)! \le (n+1)n^n \le e^{n-1}(n+1)!$$

[1] Este famoso y útil resultado dice que si $r_n \le s_n \le t_n$ y los límites de r_n y t_n existen y coinciden, como s_n está "emparedada", su límite también existe y coincide con los anteriores.

Con esto hemos conseguido hacer aparecer el $(n+1)!$. Para que aparezca $(n+1)^{n+1}$ en el término central, multiplicamos por $(n+1)^n/n^n$, obteniéndose

$$2^{n-1}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n(n+1)! \le (n+1)^{n+1} \le e^{n-1}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n(n+1)!$$

Según las propiedades vistas en clase de la sucesión que define e, $(1+1/n)^n$ es creciente, y como su límite es e, se cumple $2 \le (1+1/n)^n \le e$ para todo n, lo que sustituido en la desigualdad anterior da lugar a

$$2^n(n+1)! \le (n+1)^{n+1} \le e^n(n+1)!$$

y por tanto hemos deducido el resultado para $n+1$.

Despejando en cada una de las desigualdades del enunciado, se obtiene

$$n^n e^{1-n} \le n! \le n^n 2^{1-n}.$$

Por tanto

$$0 \le \frac{n!}{n^n} \le \frac{n^n/2^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{y} \qquad (n!)^{1/n} \ge \Big(\frac{n^n}{e^{n-1}}\Big)^{1/n} = \frac{n}{e}e^{1/n}.$$

Ahora basta notar que $1/2^{n-1} \to 0$ y $ne^{1/n}/e \to \infty$ para deducir los dos límites indicados.

Nota: La acotación del factorial $n^n e^{1-n} \le n! \le n^n 2^{1-n}$ por medio de funciones "normales" plantea algunas preguntas naturales: ¿cuál es más precisa, la primera desigualdad o la segunda? ¿es posible obtener mejores aproximaciones? Evidentemente no serían *naturales* si no hubiera una batallita en ciernes: En 1730 el matemático francés A. de Moivre, famoso sobre todo por su contribución a la teoría de la probabilidad y menos por haber predicho su propia muerte usando progresiones aritméticas, introdujo la fórmula aproximada para los factoriales $f_n = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (curiosamente hoy en día conocida como fórmula de Stirling). Se puede probar, pero es difícil, que $\lim f_n/n! = 1$, de modo que en el límite la aproximación tiene error relativo nulo. De ello, se deduce que todavía hay hueco para mejorar las dos cotas antes citadas para n grande, aunque $n^n e^{1-n} \le n!$ es más precisa.

17) Suponemos visto en clase que $\lim n^{1/n} = 1$, esto viene por ejemplo de escribir $n^{1/n} = e^{(\log n)/n}$, sabiendo que las potencias siempre "ganan" al logaritmo. Lo que vamos a hacer es deducir los límites que se piden de éste, pero el que sepa más cosas puede encontrar pruebas directas más breves.

El primer límite se puede escribir como:

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-1)^{\frac{1}{3n}} = \lim_{n\to\infty}(1-1/n^3)^{\frac{1}{3n}}(n^3)^{\frac{1}{3n}} = \lim_{n\to\infty}(1-1/n^3)^{\frac{1}{3n}}n^{1/n}.$$

En el último límite, el primer factor tiende a 1 (es de la forma 1^0) y el segundo también.

Probablemente la segunda parte de este ejercicio es bastante ingeniosa a este nivel. Una vez que han desaparecido la mayoría de los lectores, ahí va la extraña solución:

$$n((n+1)^{1/n} - n^{1/n}) = n^{1+1/n}\big((1+1/n)^{1/n}-1\big) = n^{1+1/n}\Big(\big((1+1/n)^n\big)^{1/n^2}-1\Big).$$

Hasta aquí poco más que unas sencillas manipulaciones sin sentido aparente. Ahora el truco está en recordar que la sucesión de e es creciente, de modo que para todo n se cumple

$$(1+1/n)^n \leq (1+1/n^2)^{n^2},$$

lo que tras sustituir lo anterior produce

$$0 \leq n\big((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\big) \leq n^{1+1/n}\big((1+1/n^2)-1\big) = \frac{1}{n}n^{1/n}.$$

De nuevo el teorema del *sandwich* viene en nuestra ayuda y el límite es nulo.

18) Nota: La dificultad de este problema, como la de casi todos los siguientes, es que es teórico, y al principio cuesta poner las cosas en rigor.

Indicación: La idea no es difícil, basta tomar los a_n en entornos cada vez más pequeños del supremo. Allí siempre habrá elementos de A: si es máximo, está el propio supremo, y si no lo es debe haber elementos de A infinitamente próximos a él. Se deja como ejercicio escribir esto rigurosamente.

19) Por definición, para que fuera de Cauchy, $|a_{m+n} - a_n|$ debería ser tan pequeño como se quiera cuando n y m son suficientemente grandes. Sin embargo tomando $m = n$ se tiene

$$|a_{m+n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}$$

cualquiera que sea n.

20) Nota: De nuevo estamos ante un problema teórico, la gracia está en tratar de escribir en términos matemáticos lo que uno ve en su cabeza claramente después de que ha conseguido interpretar el enunciado.

El supremo de A existe porque A está acotado superiormente por cualquier elemento de B. De la misma forma, $\inf B$ existe porque B está acotado inferiormente por cualquier elemento de A. (Estamos usando el axioma de completitud, palabra, por cierto, recientemente incluida en el diccionario).

Una vez que sabemos que existen, escribamos $s = \sup A$, $i = \inf B$ (esto es sólo ponerles un mote para escribir menos).

Si $s > i$ existirá t tal que $i < t < s$. Las intersecciones $B \cap (-\infty, t)$ y $A \cap (t, +\infty)$ no pueden ser vacías ninguna de ellas, ya que en ese caso t sería una cota inferior de B, o una cota superior de A, mayor o menor, respectivamente, que el ínfimo o el supremo. Tomando $b \in B \cap (-\infty, t)$ y $a \in A \cap (t, +\infty)$ se llega a una contradicción con el enunciado porque $b < a$.

Eligiendo $A = [0, 1)$ y $B = (1, 2]$ se tiene $\sup A = \inf B = 1$.

21) Si M_A y M_B son cotas superiores de A y B,

$$a \leq M_A \;\; \forall a \in A, \quad b \leq M_B \;\; \forall b \in B \;\Rightarrow\; a + b \leq M_A + M_B \quad \forall a + b \in C,$$

de modo que C está acotado superiormente por $M_A + M_B$.

Sea $s_A = \sup A$ y $s_B = \sup B$. Por lo anterior, $s_A + s_B$ es una cota superior de C. Veamos que es mínima por reducción al absurdo (mejor que por deducción a lo absurdo). Si $s < s_A + s_B$ fuera una cota superior de C, entonces $s - s_B < s_A = \sup A$ y por tanto existiría algún $a \in A$ tal que $s - s_B < a \leq s_A$. Digamos $a = s - s_B + \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$. tomando $b \in B$ con $s_B - \epsilon < b \leq s_B$ (siempre existe porque $s_B = \sup B$), se sigue

$$a + b = s - s_B + \epsilon + b > s - s_B + \epsilon + s_B - \epsilon = s.$$

Lo que contradice que s sea cota superior de C.

Indicación (para el resto del problema): En el caso multiplicativo el "enemigo" son los signos que pueden cambiar los signos de las desigualdades. Por ejemplo, $A = (-\infty, 0]$, $B = (-\infty, 0]$ están acotados superiormente, pero los productos de sus elementos no. Si todo es positivo, se tiene el teorema análogo. Aunque no sea la forma natural de proceder, nótese que los logaritmos transforman productos en sumas y por ello una parte del problema en la otra.

22) Distinguimos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Por definición del supremo, s es la cota superior mínima. Como $s - 1/n < s < s + 1/n$, se tiene que $s - 1/n$ no puede ser cota superior (es menor que el supremo) y $s + 1/n$ es cota superior (como el supremo lo es, también lo será cualquier número mayor).

$\Leftarrow$) Por hipótesis, para cualquier $a \in A$ se cumple $a \leq s + 1/n$. Como esto se cumple también para cualquier n, se sigue $a \leq s$ (si $a = s + \epsilon$ tomando $1/n < \epsilon$ se llegaría a una contradicción). De modo que s es cota superior. Si hubiera otra cota superior más pequeña, digamos $s' = s - \epsilon$, tomando n tal que $1/n < \epsilon$ se tendría $s' < s - 1/n$ lo que contradiría que $s - 1/n$ no es cota superior.

23) Nota: Podría pensarse que en Matemáticas las demostraciones falsas son siempre inútiles, pero hay que reconocerles el mérito de que con ellas podemos aprender a no cometer los mismos errores. El propio Euclides escribió un libro titulado "Pseudaria", que no ha llegado hasta nuestro días, conteniendo demostraciones falaces. Aunque no valga como excusa en un examen, esto muestra la importancia que ha tenido desde el principio en Matemáticas saber reconocer las arenas movedizas.

a) Indicación (casi solución): En un paso se ha dividido entre cero, lo cual está prohibido.

b) Indicación (casi solución): Puede haberse multiplicado por un número negativo en la desigualdad sin modificarla.