

1. Pruébese por inducción que para todo entero $n \geq 1$ se cumple

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

2. Hállese $\inf A$ y $\sup A$ donde

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Indíquese también si son mínimo y máximo.

3. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida de forma recurrente como $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8}$. Demuéstrese que es decreciente si y sólo si está acotada inferiormente por 4.

4. Descríbase de forma sencilla el conjunto de valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican la desigualdad

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| \leq 2.$$