Hoja 5 de Problemas

1.- Sean f y g dos funciones continuas en a, con $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ en cada punto del intervalo $(a, b]$. Demostrar que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a, b]$. Deducir de aquí que $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

2.- Considerando la función
$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p},$$
demostrar que si $a, b > 0$ y $p > 1$ se cumple
$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\,(a^p + b^p).$$

3.- Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cos x$ en $a = \frac{\pi}{4}$ (b) $f(x) = \log x$ en $a = 1$ (c) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $a = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $a = 0$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en $a = 0$ (f) $f(x) = \arctan x$ en $a = 0$

(g) $f(x) = x^5$ en $a = 3$ (h) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ en $a = 0$ (i) $f(x) = \log(1+x)$ en $a = 0$

(j) $f(x) = 3 + (x-1) + 2\,(x-1)^2 + 5\,(x-1)^3$ en $a = 0$

4.- Calcular los siguientes límites utilizando el polinomio de Taylor:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)^4}{(\log(1+x) - x)^6}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{\cos(2\,x) - 1}.$$

5.- Probar que para $x > 0$ se cumple
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

6.- Probar que para $x > 0$ se cumple
$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x.$$

7.- Probar que para $x > 0$ se cumple
$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

8.- Sea f una función 4 veces derivable en un intervalo alrededor del 0. Supongamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 + 3\,x - 5\,x^2}{x^3} = 0.$$

Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

9.- Usando la función $y = \arctan x$, calcular π con un error menor que 10^{-3}.

10.- Calcular $\cos(1)$ con un error menor que 10^{-3}.

11.- Estudiar y representar las gráficas de las siguientes funciones en el conjunto de puntos donde estén definidas.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$ $\quad(b)$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4\,x + 5}$ $\quad(c)$ $y = |x^2 - 6\,x + 5| + |x - 2|$

(d) $f(x) = 1 + \dfrac{16}{2^{\frac{1}{x}} - 4}$ $\quad(e)$ $y = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad(f)$ $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(g) $y = \dfrac{x^2}{2} - \log|x|$ $\quad(h)$ $y = \log \dfrac{1 + x}{1 - x}$ $\quad(i)$ $f(x) = e^{-x^2}$

(j) $f(x) = \begin{cases} |2\,x + 1| & \text{si} \quad x \leq 1, \\ x^2 - 2\,x + 4 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$