1. Se dan los primeros términos de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Suponiendo que la sucesión prosigue como se indica, hallar una fórmula explícita para a_n.
a) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9} \dots$ b) $-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, -\frac{5}{36} \dots$

2. Determinar si las sucesiones siguientes son monótonas o acotadas
a) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\left\{\frac{(n+1)^2}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. Demostrar que la sucesión $\{5^n/n!\}$ decrece a partir de $n = 5$.

4. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 2a_n + 1$, para todo $n \geq 1$. Demostrar por inducción que $a_n = 2^n - 1$.

5. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \sqrt{a_{n-1}}$, para todo $n \geq 2$. Mediante inducción, probar que
a) es una sucesión creciente,
b) está acotada superiormente.
Calcular el límite de la sucesión. *Sugerencia:* Tomar límites en la fórmula que define la sucesión.

6. a) Demostrar que si $0 < a < 2$, entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.
b) Demostrar que la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \dots$$

converge.
c) Hallar su límite.

***7.** Identificar la función

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2k}\right).$$

(Ha sido mencionada varias veces en este curso).

8. Supóngase que f es creciente sobre $[1, \infty]$. Demostrar que

$$f(1) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx < f(2) + \cdots + f(n).$$

b) Elíjase ahora $f(x) = \log x$ y demuéstrese que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

c) Concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

9. Decidir si la sucesión converge o no y, en caso afirmativo, hallar su límite.

$$\left\{ \frac{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}\,(e^n\pi)}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \{2\log(3n) - \log(n^2+1)\}_{n=1}^{\infty} \qquad \{n^2\mathrm{sen}\,(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\left\{ n^2\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \left\{ \int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

10. La sucesión de Fibonacci se define recursivamente por

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \qquad \text{con} \qquad a_1 = a_2 = 1.$$

Definir ahora la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Suponiendo que $r_n \to L$, hallar L. *Sugerencia:* demostrar que

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$