1. Calcular
$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx.$$
En la segunda, dividir el numerador entre el denominador.

2. Calcular
$$\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx, \qquad \int x(1-x)e^{-x}\,dx, \qquad \int \arctan x\,dx.$$

3. Hallar $\int \cos(\log x)\,dx$ integrando por partes dos veces.

4. Calcular
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx, \qquad \int_{-1/6}^{1/3} \operatorname{sen}^4(3\pi x)\,\cos^3(3\pi x)\,dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \cos(4x)\,\operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

5. Calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$.

6. Hallar las integrales
$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx, \qquad \int \frac{x}{x^3-1}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

7. Calcular el valor de la integral
$$\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx.$$

8. Hallar las integrales
$$\int \frac{dx}{1-\sqrt{x}}, \qquad \int \sqrt{1+e^x}\,dx.$$

9. Comprobar, derivando en ambos miembros, la fórmula
$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + K$$

10. Hallar las integrales

$$\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx, \qquad \int (x^2+1)\operatorname{sen} x\,dx.$$

***11.** En las tablas aparece que la derivada de arcsen x es $1/\sqrt{1-x^2}$, y que la de arccos x es $-1/\sqrt{1-x^2}$. Integrando la relación $1/\sqrt{1-x^2}-1/\sqrt{1-x^2}=0$, se obtiene por tanto arcsen $x+$ arccos $x=0$, que no es cierto. ¿Dónde está el error?

***12.** El propósito de este problema es probar una curiosa fórmula debida a J. Wallis para $\pi/2$.

a) Demostrar que $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$.

b) Deducir que

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$
$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n} x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

c) Sea $\mathcal{P}_n$ el producto

$$\mathcal{P}_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

d) Utilizando las desigualdades $0<\operatorname{sen}^{2n+1} x\le\operatorname{sen}^{2n} x\le\operatorname{sen}^{2n-1} x$, $0\le x\le\pi/2$; demostrar que

$$\mathcal{P}_n\le\frac{\pi}{2}\le\left(1+\frac{1}{2n}\right)\mathcal{P}_n.$$

Por tanto, "en el límite", $\mathcal{P}_n$ coincide con $\pi/2$. Sorprendentemente, Wallis obtuvo esta fórmula para $\pi/2$ como producto infinito, antes de que fuera creado el cálculo infinitesimal.