

1. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \int_0^{x^3} t \cos t \, dt, \quad g(x) = \int_{x^2}^1 (t - \operatorname{sen}^2 t) \, dt.$$

2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudiar si $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ es derivable.

3. Sea f una función continua tal que $\int_0^x t f(t) \, dt = \operatorname{sen} x - x \cos x$. Hallar $f(\pi/2)$ y $f'(\pi/2)$.

4. Sea f una función continua y sea $F(x) = \int_0^x (t \int_1^t f(u) \, du) \, dt$. Hallar $F'(1)$ y $F''(x)$.

5. Calcular

$$\int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \, dx, \quad \int_1^2 \frac{2-x}{x^3} \, dx, \quad \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} |\cos x| \, dx.$$

6. Hallar el área limitada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$ y el eje X cuando $x \in [1, 4]$.

7. Hallar el área limitada entre las gráficas $f(x) = 8 - x^2$ y $g(x) = x^2$.

8. Hallar el área limitada entre las gráficas $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ y $g(x) = \frac{1}{2}|x|$.

9. Hallar la integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$ donde $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, y hallar el área limitada por la gráfica de esta función y el eje X cuando $x \in [-\pi, \pi]$.

10. Calcular las integrales

$$\int (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x}) \, dx, \quad \int \frac{\log x}{x} \, dx, \quad \int \frac{1}{x \log x} \, dx.$$

11. Calcular las integrales

$$\int \frac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}} \, dx, \quad \int x\sqrt{x+1} \, dx, \quad \int x \sec^2 x^2 \, dx.$$

12. Calcular las integrales

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \cos^2(5x) dx, \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

13. Supongamos que para cierta f continua en $[a, b]$ se cumple $\int_a^b f(x) dx = 0$. ¿Es cierto que siempre existe un punto intermedio $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$? En caso afirmativo, ¿es único?

14. Hallar la derivada de $\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} (2 + \sqrt{t})^{-1} dt$.

15. Si f es impar, ¿cuánto vale $\int_{-a}^a f(x) dx$? Y si f es par, ¿cuánto vale $\int_{-a}^a f(x) dx - 2 \int_0^a f(x) dx$?

16. Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, y sea G su función inversa. Hallar $G'(0)$.

***17.** Sean f y g continuas con g creciente. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = g(a) \int_a^c f(t) dt + g(b) \int_c^b f(t) dt.$$

****18.** Hallar el valor de la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + x - 4}{\cos x + 2} dx.$$