1. Probar que la ecuación

$$x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$$

tiene exactamente una raíz real.

2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si $b = -1$ y $c = 1$; comprobar que no existe ningún $a \in (b, c)$ tal que

$$f'(a) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

y explicar por qué esto no contradice el teorema del valor medio.

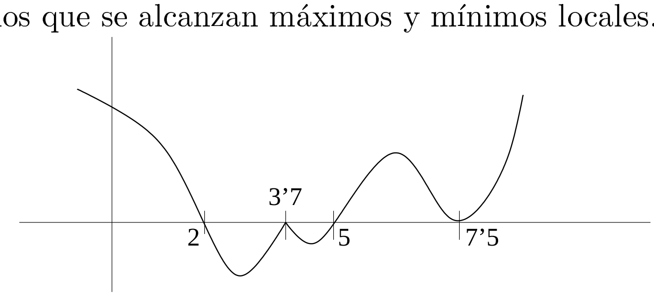
3. Sea f diferenciable en (a, b) con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$. Dar un ejemplo que pruebe que f no tiene por qué ser continua en $[a, b]$.

4. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$.

5. Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Probar que f es creciente en $\mathbb{R}$ y utilizar el resultado para probar las desigualdades

$$x < \operatorname{sen} x \quad \text{si } x < 0, \qquad x > \operatorname{sen} x \quad \text{si } x > 0.$$

6. Suponiendo que la derivada de una función tiene la gráfica de la figura, indicar todos los valores en los que se alcanzan máximos y mínimos locales.



7. Hallar los puntos críticos y los extremos locales de $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)$.

8. La derivada de una función f es

$$f'(x) = x^3(x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Indicar para qué valores de x la función f alcanza un máximo o un mínimo local.

9. Hallar el máximo y el mínimo (absolutos) de la función $f(x) = x^5 + x + 1$ en el intervalo $[-1, 1]$ y de $g(x) = (x+1)/(x^2+1)$ en $[-1, 1/2]$.

10. Un lado de un campo rectangular está limitado por un río. Los demás lados deben cercarse con una valla que mide en total 244 metros. Calcular el área máxima que puede tener el campo.

11. Supongamos que una caja rectangular con tapa está hecha con 100 cm^2 de cartón y que la base es el doble de larga que de ancha. Calcular la capacidad máxima de la caja.

12. En un trozo rectangular de cartón de 8 $cm \times 15$ cm se han cortado cuatro cuadraditos iguales en cada esquina, de manera que la figura restante se puede doblar para construir una caja sin tapa. Hallar el lado de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo.

13. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3}, \qquad f(x) = \frac{x}{\log x}, \qquad f(x) = e^{-x^2}, \qquad f(x) = \frac{2x^2}{x+1}.$$

14. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \, \log x, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}, \qquad \lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}.$$

15. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x(4x+3)} - 2x\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}, \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{x+1+\operatorname{sen}(x^{2002})}{x+5}.$$

***16.** Considérense funciones tales que $g(x) \le f(x) \le h(x)$. Demostrar que si $g(0) = h(0) = g'(0) = h'(0) = 0$ entonces f es derivable en cero y $f'(0) = 0$. Dar un ejemplo que muestre que si además de lo anterior $g''(0) = h''(0) = 0$, entonces puede que $f''(0)$ no exista.