1. Calcular razonadamente los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x^2}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(3x)}{4x^2}.$$

2. Sabiendo que $|f(x)/x| \leq M$ para todo $x \neq 0$, calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ explicando el resultado.

3. Aplicar el teorema de los valores intermedios (teorema de Bolzano) para probar que existe al menos una solución de la ecuación

$$\operatorname{sen} x + 2\cos x - x^2 = 0.$$

4. Dada la función

$$f(x) = x^5 - 2x^2 + 5x,$$

demostrar que existe un c tal que $f(c) = 1$.

5. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4},$$

demostrar que existe un $c \in (1,4)$ tal que $f(c) = 0$.

6. Hallar una aproximación a la solución de

$$x^3 - x + 3 = 0$$

con al menos una cifra decimal correcta.

7. Explicar si existe una función continua en $[0,1]$ que no tome valores racionales, y en caso afirmativo dar una aproximación de su gráfica.

8. Sea f es continua en $[0,1]$ con $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$.

a) Demostrar que existe al menos un punto $c \in [0,1]$ que queda fijo por f, es decir, tal que $f(c) = c$. ¿Pueden existir varios?

b) Demostrar que si g es continua en $[0,1]$ con $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, entonces existe $c \in [0,1]$ con $f(c) = g(c)$.

c) Probar que el apartado anterior se sigue cumpliendo si $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$.

9. Sea f una función continua en $(0,1)$, estudiar si es siempre cierto que su imagen es acotada. ¿Y si f es continua en $[0,1]$?

10. Sea p un número real positivo, y consideremos el conjunto $\mathcal{R}$ formado por todos los rectángulos de perímetro p. Probar que existe un rectángulo de $\mathcal{R}$ con área máxima. Hallar las dimensiones de dicho rectángulo.

11. Estudiar si la siguiente función alcanza un máximo y un mínimo en $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

*__12.__ Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Comprobar que no es continua pero satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios, es decir, que si f toma dos valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, entonces también toma todos los intermedios en el intervalo determinado por x_1 y x_2. Probar que es imposible encontrar una función no continua con dicha propiedad si además se exige que f sólo tome una vez cada valor intermedio.