ANÁLISIS MATEMÁTICO I. HOJA 2

1. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x}$

c) $g(x) = -2\cos x$

2. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x-2}{x}$. Formar la composición $f \circ g$ y hallar el dominio.

3. Suponer que f y g son funciones impares. ¿Qué se puede deducir sobre $f \cdot g$? Justificar la respuesta.

4. Decir si existen o no los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

b) $\lim_{x\to 0} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \text{ racional} \\ -2, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

c) $\lim_{x\to 1} f(x); \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ racional} \\ 2, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$.

5. Calcular los límites que existan:

a) $\lim_{h\to 0} h\left(1 + \dfrac{1}{h}\right)$.

b) $\lim_{h\to 0} h\left(1 + \dfrac{1}{h^2}\right)$.

c) $\lim_{x\to -4} \left(\dfrac{2x}{x+4} + \dfrac{8}{x+4}\right)$.

d) $\lim_{x\to 4} \left[\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{x-4}\right)\right]$.

6. Demostrar, dando un ejemplo, que $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ puede existir sin que existan ni $\lim_{x\to c} f(x)$ ni $\lim_{x\to c} g(x)$.

7. Decidir si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos:

a) Si $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ existe, pero $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe, entonces $\lim_{x\to c} g(x)$ no existe.

b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$.

c) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \neq c$, entonces $\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x)$.

8. Determinar el tipo de discontinuidad de $h(x)$ en $x = -1$.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ -2, & x = -1 \end{cases}$$

9. Definir, cuando sea posible, $f(1)$ para que f sea continua en $x = 1$:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$.

10. Hallar los puntos donde $g(x)$ es continua:

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \text{ es un entero} \\ x^2, & \text{si no lo es.} \end{cases}$$

11. Demostrar que si

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to 0} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

12. Dar un ejemplo de una función f que no es continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.