ANÁLISIS MATEMÁTICO I (**PLAN NUEVO**)
PRIMER CURSO DE CIENCIAS FÍSICAS
6 de septiembre de 2002

Soluciones

1) Escribiremos $f(x) = x/\log x$.

a) Dominio: El denominador $\log x$ sólo está definido para en $(0, +\infty)$ y se anula en $x = 1$, por tanto $\text{Dom}\, f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Asíntotas: Es fácil probar (regla de l'Hôpital) que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, de modo que no hay asíntotas horizontales. En $x = 1$, donde se anula el denominador, el límite es $\lim_{x\to 1} x/\log x = \infty$. Así que $x = 1$ es una asíntota vertical. En el otro valor de x en el "borde" del dominio, $x = 0$, no hay asíntota porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Continuidad y derivabilidad: La derivada se puede calcular en todos los puntos del dominio derivando el cociente que define f. Concretamente

$$f'(x) = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}.$$

Como f es derivable en todos los puntos del dominio también es continua en ellos.

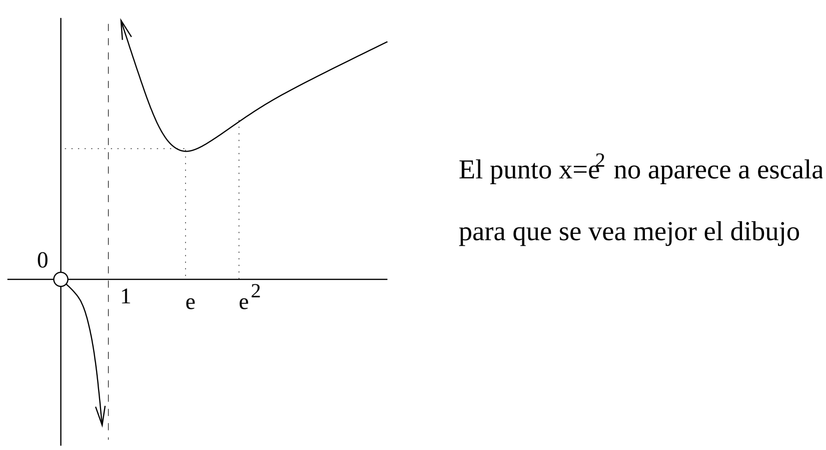
Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos: Según la fórmula para f' la derivada es positiva si $\log x > 1$ y negativa si $\log x < 1$. Esto implica que f es creciente en $(e, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1)$ y $(1, e)$ ($x = 1$ no pertenece al dominio). Como en $x = e$ la función f pasa de ser decreciente a ser creciente, hay un mínimo. El punto $(e, f(e))$ es (e, e).

Concavidad y convexidad y puntos de inflexión: Calculando la derivada segunda,

$$f''(x) = \frac{x^{-1}\log^2 x - 2x^{-1}(\log x)(\log x - 1)}{\log^4 x} = \frac{-\log x + 2}{x \log^3 x}.$$

En el intervalo $(0, 1)$ el numerador es positivo y el denominador negativo, en $(1, e^2)$ el numerador es positivo y el denominador también, y en $(e^2, +\infty)$ el numerador es negativo y el denominador positivo. Por tanto f es cóncava en $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$ y convexa en $(1, e^2)$. Por tanto, se alcanza un punto de inflexión en $x = e^2$. El punto completo es $(e^2, f(e^2)) = (e^2, \frac{1}{2}e^2)$.

b)



2) a) Integrando por partes con $u = \log x$ y $v' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, se tiene

$$\int \frac{\log x}{2\sqrt{x}}\,dx = \int uv' = x^{1/2}\log x - 2x^{1/2} + K.$$

Por otra parte, $\int dx/\sqrt{x} = 2x^{1/2} + K$. Por tanto

$$\int \left(\frac{\log x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = x^{1/2}\log x + K.$$

b) (En el curso 2002/2003 sólo hemos visto integrales impropias de la forma $\int_1^\infty$, pero la idea es la misma). Para ver si converge, basta comprobar si existe el límite que resulta de "sustituir" los límites de integración en la primitiva calculada en el apartado anterior:

$$\lim_{x\to 0^+} t^{1/2}\log t\Big|_x^1 = -\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\log x = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x^{-1/2}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-3/2}/2} = 0.$$

Donde se ha empleado la regla de l'Hôpital. Como el límite existe, la integral converge.

3) a) Derivando $f(x) = x\log(x+1)$ se tiene

$$f'(x) = \log(x+1) + \frac{x}{x+1}, \qquad f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}, \qquad f'''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Por consiguiente,

$$T_{3,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

b) Por el teorema de Taylor sabemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - T_{3,0}(x)}{x^3} = 0.$$

Cambiando la variable $x \mapsto x^2$ esto implica

$$0 = \lim_{x\to 0} = \frac{f(x^2) - T_{3,0}(x^2)}{x^6} = \lim_{x\to 0} = \frac{g(x) - (x^4 - \frac{1}{2}x^6)}{x^6}.$$

Por tanto, el polinomio $x^4 - \frac{1}{2}x^6$ es el polinomio de Taylor de orden 6 alrededor de 0 (ya que tiene grado 6 y aproxima hasta orden al menos 6).

c) Se puede aplicar la regla de l'Hôpital cuatro veces, pero es más sencillo usar que x^4 es, según el apartado anterior, el polinomio de Taylor de orden 4 de $g(x)$ alrededor de 0. Por tanto $\lim_{x\to 0} g(x)/x^4 = \lim_{x\to 0}((g(x) - x^4)/x^4 + 1) = 0 + 1 = 1$. Consecuentemente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{x^2\log(x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^4(2x)}{x^4}\cdot\frac{x^4}{g(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^4 = 2^4 = 16.$$

4) A la primera serie se le puede aplicar comparación por paso al límite con $b_n = 1/n$, ya que

$$\lim \frac{(n+1)/(n^2+1)}{1/n} = \lim \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1.$$

Como $\sum 1/n$ diverge (criterio de la integral), la primera serie también.

A la segunda se le puede aplicar el criterio del cociente. Operando $\lim a_{n+1}/a_n$ se tiene:

$$\lim \frac{(n+1)!/\big((n+1)^{n+1}+2^{n+1}\big)}{n!/\big(n^n+2^n\big)} = \lim \frac{(n+1)(n^n+2^n)}{(n+1)^{n+1}+2^{n+1}} = \lim \frac{n^n+2^n}{(n+1)^n+2^{n+1}/(n+1)}.$$

Diviendo entre n^n y utilizando que $2/n \to 0$ y $\big(1+\frac{1}{n}\big)^n \to e$, se concluye

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1+\big(\frac{2}{n}\big)^n}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n + \big(\frac{2}{n}\big)^n \frac{2}{n+1}} = \frac{1+0}{e+0} = \frac{1}{e} < 1.$$

Y entonces converge.

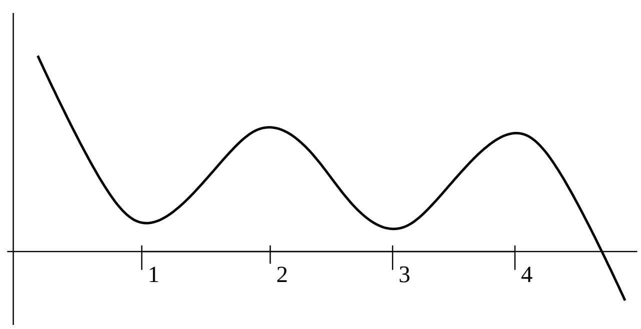
Finalmente, la tercera serie diverge ya que $a_n = (-1)^n\sqrt{n+1}$ no tiende a cero. Nótese que el criterio de Leibniz <u>no</u> se aplica porque $\sqrt{n+1}$ no es decreciente.

5) (En la primera línea debería decir $F'(x)$ en lugar de $f'(x)$).

a) F será creciente si la derivada es positiva y será decreciente si la derivada es negativa. Así que los intervalos de crecimiento son $(1,2)\cup(3,4)$, y los de decrecimiento $(-\infty,1)\cup(2,3)\cup(4,+\infty)$.

b) Se alcanzan mínimos locales en $x=1$ y en $x=3$ porque la función pasa de decreciente a creciente, y se alcanzan máximos locales en $x=2$ y en $x=4$ porque la función pasa de creciente a decreciente.

c)



La altura a la que se sitúa el eje X es arbitraria.

d) Los puntos de inflexión corresponde a puntos en los que $F'(x)$ pasa de ser creciente ($F''(x)>0$) a decreciente ($F''(x)<0$) o viceversa. Según el dibujo de F' hay un punto de este tipo en cada uno de los intervalos $(1,2)$, $(2,3)$ y $(3,4)$. Por tanto hay tres puntos de inflexión.