Solución del examen de Análisis Matemático I. Febrero 2003

1) Se puede aplicar la regla de l'Hôpital al primer límite escribiendo $(1-\cos x)\log x$ en la forma $(\log x)/\big(1/(1-\cos x)\big)$, ya que $\log x\to-\infty$ y $1/(1-\cos x)\to\infty$ cuando $x\to 0^+$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1/(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\operatorname{sen} x/(1-\cos x)^2}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)^2\operatorname{sen} x}{x}.$$

Como $\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)/x=1$, el último límite es $-0\cdot 1=0$. También se puede aplicar de nuevo la regla de l'Hôpital.

Para calcular el segundo límite basta basta multiplicar y dividir por el conjugado y dividir numerador y denominador entre x.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{(\sqrt{x^2+x+1}+x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2) a) A simple vista se tiene que $c=0$ es una solución. Otra forma de proceder es considerar la función continua $f(x)=\operatorname{sen} x+e^x-e^{-x}$. Evidentemente $f(1)>0$, porque $e>2$, y $-e^{-1}$ y $\operatorname{sen} 1$ son mayores que -1. Además $f(-1)=-f(1)<0$. De modo que el teorema de los valores intermedios implica que existe $c\in(-1,1)$ con $f(c)=0$.

b) Considérese $g(x)=e^x+e^{-x}$. Se tiene $g'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)$, de modo que $g'<0$ en $(-\infty,0)$ y $g'>0$ en $(0,+\infty)$, así pues g decrece hasta $x=0$ y crece desde $x=0$. Por tanto en $x=0$ se alcanza un mínimo (absoluto) y se cumple $g(x)\ge g(0)=2$.

c) Con la notación de los anteriores apartados, $f'(x)=\cos x+g(x)\ge -1+2>0$. Si existieran dos números reales $c_1\ne c_2$ con $f(c_1)=f(c_2)=0$, por el teorema de Rolle o el del valor medio, existiría un valor intermedio en el que $f'(x)=0$, lo que contradice $f'>0$. (Todo este argumento se reduce a decir que una función creciente definida en $\mathbb{R}$ sólo puede cortar a lo más una vez al eje X).

3) El dominio de $\sqrt{x}$ es $[0,+\infty)$, y el de $\log x$ es $(0,+\infty)$. Por tanto $\operatorname{Dom} f=(0,+\infty)$.

Derivando
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}\log x+x^{-1/2}=\frac{1}{2}x^{-1/2}(\log x+2).$$

De modo que $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=e^{-2}$ y $f'<0$ en $(0,e^{-2})$ y $f'>0$ en $(e^{-2},+\infty)$. Por tanto f es decreciente en el intervalo $(0,e^{-2})$, en $x=e^{-2}$ alcanza un mínimo, el punto completo es $(e^{-2},-2e^{-1})$, y es creciente en $(e^{-2},+\infty)$.

Derivando una vez más

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}(\log x+2)+\frac{1}{2}x^{-3/2}=-\frac{1}{4}x^{-3/2}\log x.$$

Por tanto f es convexa en el intervalo $(0,1)$ y cóncava en $(1,+\infty)$. El punto $(1,0)$ es de inflexión (y de corte con el eje X).

La gráfica de f parte de un punto infinitamente próximo a $(0,0)$ porque $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\log x=\lim_{x\to 0^+}\log x/x^{-1/2}=-2\lim_{x\to 0^+}x^{-1}/x^{-3/2}=0$. Después baja decreciendo hasta el mínimo $(e^{-2},-2e^{-1})$. Y después sube dirigiéndose hacia el infinito cortando al eje X en $(1,0)$ y cambiando su curvatura allí. (Nota: Si esta información no es suficiente para visualizar la gráfica, pregúntese al profesor).

4) Derivando

$$f'(x) = 2\big(2\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x)) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\big) = 4\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x)) - 2\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x).$$

Nótese que esto se puede deducir del teorema fundamental del cálculo escribiendo $\int_x^{2x} = \int_0^{2x} - \int_0^x$.

Derivando una vez más

$$f''(x) = 8\cos(2x)\cos(\operatorname{sen}(2x)) - 2\cos x \cos(\operatorname{sen} x).$$

Por tanto $f(0) = f'(0) = 0$ y $f''(0) = 6$. Sustituyendo en la definición del polinomio de Taylor

$$T_{2,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = +\frac{6}{2!}x^2 = 3x^2.$$

5) Como $|\operatorname{sen} x| \ge 0$ y $x^2 - \pi^2 \le 0$ en $[-\pi, \pi]$, el área es

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

con $f(x) = |\operatorname{sen} x| - x^2 + \pi^2$. Esta función es par, $f(x) = f(-x)$, de modo que $\int_{-\pi}^0 f = \int_0^\pi f$ y se puede escribir

$$A = 2\int_0^\pi f(x)\, dx = 2\big(-\cos x - \frac{x^3}{3} + \pi^2 x\big)\Big|_0^\pi = 2\big(1 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 + 1\big) = 4 + \frac{4\pi^3}{3}.$$

Nótese que como $\operatorname{sen} x \ge 0$ en $[0, \pi]$, $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$ en este intervalo.

6) a) Comprobemos que la sucesión es decreciente:

$$a_n > a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{e^n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \;\Leftrightarrow\; en > n + 1 \;\Leftrightarrow\; (e-1)n > 1.$$

Como $e - 1 > 1$, esto se cumple para todo entero positivo n.

Por definición la convergencia de a_n se reduce a comprobar la existencia del límite. Por la regla de l'Hôpital

$$\lim a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$$

b) A la primera serie se le puede aplicar comparación por paso al límite con $1/n$, ya que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^3+2)/(n^4+7)}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 + 2n}{n^4 + 7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 2/n^3}{1 + 7/n^4} = 1.$$

Como $\sum 1/n$ diverge (criterio de la integral, $\int_1^\infty dx/x$ diverge), también lo hace la primera serie.

A la segunda serie se le puede aplicar el criterio del cociente

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-n-1}}{ne^{-n}} = \frac{1}{e} < 1.$$

Por tanto la serie converge.