UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
ANÁLISIS MATEMÁTICO II. Curso académico 2004/2005.
Primer curso de Ingeniería Informática.
2 de Septiembre de 2005.

Problema 1. Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) ¿Es f continua? Razona la respuesta. (0.75 puntos).
b) ¿Está definida la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$? Razona la respuesta. (1 punto)
c)¿Es f diferenciable? Razona la respuesta. (0.75 puntos).

Solución:
a) La función es claramente continua en cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$, y también lo es en $(0,0)$ porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Esto último se puede demostrar de dos formas:
Primera forma: $0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{|x|^2}{\sqrt{x^2}} = |x| \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$
Segunda forma: $0 \leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| = \left| \frac{r^2\cos^2\theta}{r} - 0 \right| \leq r \to 0$, cuando $r \to 0$.

b) La función $\frac{\partial f}{\partial x}$ no está bien definida en el punto $(0,0)$. Esto es lo mismo que afirmar que el límite $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ no existe. Efectivamente, $\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+0^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$, y este límite no existe.

c) Como no existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, la función no puede ser diferenciable en el $(0,0)$. La existencia de las derivadas parciales es una condición necesaria para que la función sea diferenciable.

Problema 2. Calcula (usando un cambio a coordenadas cilíndricas) la integral triple

$$\int_M ze^{-(x^2+y^2)}\, dxdydz,$$

siendo M el conjunto limitado inferior y lateralmente por el cono $2(x^2+y^2) = z^2$ y superiomente por el hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 - 1$, en el semiespacio $z \geq 0$. (2.5 puntos).

Indicación. Se puede calcular la integral como la diferencia de dos integrales: la primera limitada superiomente por el plano $z = \sqrt{2}$ e inferiomente por el cono y la segunda limitada superiormente por el mismo plano e inferiomente por el hiperboloide. Justifica la indicación en caso de utilizarla.

Solución: Eliminando $x^2 + y^2$ de las dos superficies, vemos que el cono y el hiperboloide se cortan en una circunferencia en el plano $z = \sqrt{2}$. La expresión del cono en cilíndricas es $\rho = \frac{z}{\sqrt{2}}$, $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, y la del hiperboliode es $\rho = \sqrt{z^2-1}$, $1 \leq z \leq \sqrt{2}$. Siguiendo la indicación, calculamos la primera integral,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} ze^{-\rho^2}\rho\, d\rho dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-ze^{-\frac{z^2}{2}} + z}{2}\, dz d\theta = \frac{\pi}{e}.$$

Calculamos también la segunda integral,

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{z^2-1}} ze^{-\rho^2} \rho \; d\rho dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-ze^{-(z^2-1)} + z}{2} \; dz d\theta = \frac{\pi}{2e}.$$

Así que $\int_M ze^{-(x^2+y^2)} \; dxdydz = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2e}$.

Problema 3.
a) Calcula la integral $\int_c yzdx + xzdy + xydz$, donde $c(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$. (1.25 puntos).
b) Prueba que la integral $\int_c yzdx + xzdy + xydz = 0$ siendo c una curva cerrada cualquiera. (1.25 puntos).

Solución:
a) $\int_c yzdx + xzdy + xydz = \int_0^1 t^2t^3dt + t \cdot t^3 d(t^2) + t \cdot t^2 d(t^3) = \int_0^1 6t^5 dt = 1$.

b) La integral de linea del gradiente de una función a lo largo de una curva cerrada vale siempre cero. Como la función que estamos integrando, $f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, es el gradiente de la función $F(x, y, z) = xyz$, su integral a lo largo de cualquier curva cerrada vale siempre cero.

El apartado a) también se podía haber hecho de la siguiente manera: $\int_c yzdx + xzdy + xydz = \int_c \nabla F d\sigma = F(1, 1, 1) - F(0, 0, 0) = 1$.

Problema 4. Encuentra y clasifica los puntos críticos de $f(x, y) = 2x^3 - 2x - 2xy^2 + \frac{4}{3}y^3 + 5$. (2.5 puntos).

Debemos resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 2 - 2y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 4y^2 = 0 \end{cases}$. Si $y = 0$, entonces $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ y obtemos dos soluciones $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. Si $y \neq 0$, entonces, dividiendo la segunda ecuación por y, tenemos que $y = x$. Sustituyendo en la primera tenemos que $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, y obtenemos otras dos soluciones: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Ahora calculamos el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$ y el valor de $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2 = 12x(8y - 4x) - 16y^2$, para clasificar cada uno de los cuatro puntos obtenidos:

- $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ $D = -16 < 0$, punto de silla.
- $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ $D = -16 < 0$, punto de silla.
- $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ $D = 16 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{12}{\sqrt{2}} > 0$, mínimo local.
- $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ $D = 16 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{12}{\sqrt{2}} < 0$, máximo local.