ANÁLISIS MATEMÁTICO II. Curso Primero. Ing. Informática. UAM.
Dpto. de Matemáticas. HOJA 11

1. Demuestre que se verifica el teorema de Green para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (-2y - 3x^2, 3x^2 - 2y^2),$$

y la curva $\mathbf{c}$ definida por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1, $n = 2$ ó 3.
a) Pruebe que

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \; ds = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

b) Sea $\mathbf{c}$ la curva definida por la circunferencia unidad

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

calcular la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} y \; dx + x \; dy.$$

3. a) Hallar el área encerrada por la curva $(2\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
b) Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} xy\, dx - y^2\, dy$, siendo $\mathbf{c}$ la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ recorrida en el sentido opuesto al de las agujas del reloj.

4. Hallar el área encerrada por la curva $(\sin t, t \sin t)$, $0 \le t \le \pi$.

5. Considerar la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} y^3 \; dx + x^3 \; dy,$$

siendo $\mathbf{c}$ al circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.
a) Calcular la integral utilizando el teorema de Green.
b) Calcular la integral directamente. Indicación: obsérvese que $(\cos t)^4 - (\sin t)^4 = ((\cos t)^2 + (\sin t)^2)((\cos t)^2 - (\sin t)^2)$.

6. a) Calcular la integral $\int_{\mathbf{c}} yzdx + xzdy + xydz$, donde $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$.
b) Probar que la integral $\int_{\mathbf{c}} yzdx + xzdy + xydz = 0$ siendo $\mathbf{c}$ una curva cerrada cualquiera.

7. Calcular la integral curvilínea

$$\int_{\sigma} y^2 z^3\, dx + (2xyz^3 + z^2)\, dy + (3xy^2 z^2 + 2yz + 1)\, dz$$

donde $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ es la curva $\sigma(t) = (\frac{t}{1+t^2}, \frac{-t}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^6})$.

8. El área de la porción de superficie de ecuaciones $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$ con $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ vale:

(a) $\frac{\pi}{6}\sqrt{5}$.

(b) $\frac{\pi}{8}(\sqrt{5} - 1)$.

(c) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

(d) $\frac{\pi}{6}(4\sqrt{5} - 1)$.

(e) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} + 1)$.

9. Sea el campo $\vec{F} = (2y + e^x, x + \operatorname{sen}(y^2))$ y sea C el círculo $x^2 + y^2 = 1$ recorrido en sentido positivo. Calcular la integral $\int_C \vec{F}$.

10. Dados el campo vectorial $\vec{F} = (x^2, 0, y^2)$ y la curva $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, 0 \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, dígase cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(a) La curva γ y el campo $\vec{F}$ son ortogonales en cada punto.

(b) $\vec{F}$ es un campo gradiente.

(c) $\vec{F}$ es tangente a la curva en cada punto.

(d) $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

(e) γ tiene tangente en todo punto.