La catacaústica más usual

Análisis Matemático II

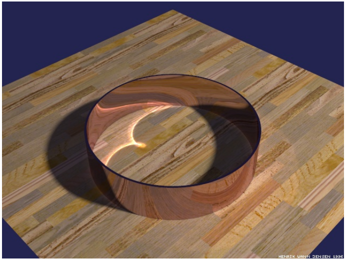
1º Ingeniería Informática

http://www.uam.es/fernando.chamizo

Índice

1. Fotos
2. Esquemas
3. Reflexión
4. Cálculos
5. Singularidad
6. Referencias

El fenómeno

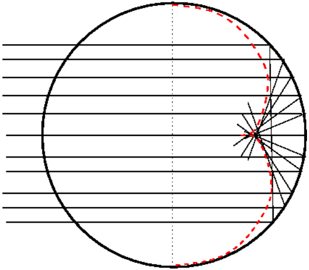


http://graphics.ucsd.edu/~henrik

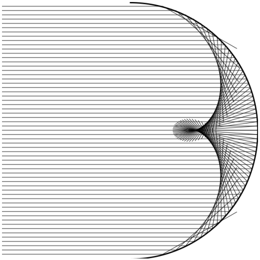
http://www.odu.edu/~jadam

Es uno de esos experimentos que salen de verdad. Se puede ver en una taza de café, una caja de galletas redonda metálica, una alianza, etc. Se debe usar una fuente de luz puntual y lejana (con una cercana se ve una curva parecida). Los focos halógenos son una buena opción.

La explicación geométrica



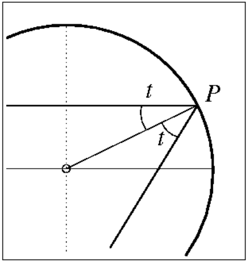
Unos pocos rayos



http://pl.wikipedia.org/wiki/Kaustyka

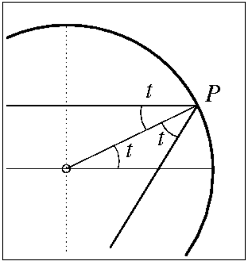
Los rayos de luz incidentes son paralelos y se reflejan en el borde circular dando lugar a rayos reflejados tangentes a cierta curva. Localmente una curva se aproxima bien por sus rectas tangentes y a lo largo de la curva se produce una acumulación y interferencia de tangentes que se muestra especialmente iluminada.

Geometría de la reflexión



ang. incid. = ang. reflex.

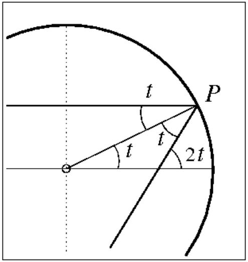
Geometría de la reflexión



ang. incid. $=$ ang. reflex.

$P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

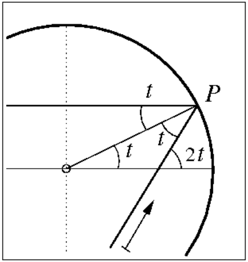
Geometría de la reflexión



ang. incid. = ang. reflex.

$$P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Geometría de la reflexión

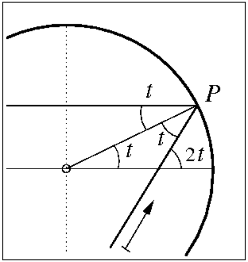


ang. incid. = ang. reflex.

$P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$\vec{v} = \big(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)\big)$

Geometría de la reflexión



ang. incid. = ang. reflex.

$$P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$\vec{v} = \big(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)\big)$$

Ecuación del rayo reflejado:

$$\begin{cases} x = \cos t + \lambda \cos(2t) \\ x = \operatorname{sen} t + \lambda \operatorname{sen}(2t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \operatorname{sen}(2t) - y \cos(2t) = \operatorname{sen} t}$$

Queremos hallar el punto de tangencia $(x(t), y(t))$. El vector director debe ser proporcional al vector tangente $(x'(t), y'(t))$.

Queremos hallar el punto de tangencia $(x(t), y(t))$. El vector director debe ser proporcional al vector tangente $(x'(t), y'(t))$.

$$\frac{x'(t)}{\cos(2t)} = \frac{y'(t)}{\operatorname{sen}(2t)} \quad \Rightarrow \quad x'(t)\operatorname{sen}(2t) - y'(t)\cos(2t) = 0.$$

Queremos hallar el punto de tangencia $(x(t), y(t))$. El vector director debe ser proporcional al vector tangente $(x'(t), y'(t))$.

$$\frac{x'(t)}{\cos(2t)} = \frac{y'(t)}{\operatorname{sen}(2t)} \quad \Rightarrow \quad x'(t)\operatorname{sen}(2t) - y'(t)\cos(2t) = 0.$$

Por otro lado, derivando $x(t)\operatorname{sen}(2t) - y(t)\cos(2t) = \operatorname{sen} t$,

$$x'(t)\operatorname{sen}(2t) + 2x(t)\cos(2t) - y'(t)\cos(2t) + 2y(t)\operatorname{sen}(2t) = \cos t.$$

Queremos hallar el punto de tangencia $(x(t), y(t))$. El vector director debe ser proporcional al vector tangente $(x'(t), y'(t))$.

$$\frac{x'(t)}{\cos(2t)} = \frac{y'(t)}{\operatorname{sen}(2t)} \quad \Rightarrow \quad x'(t)\operatorname{sen}(2t) - y'(t)\cos(2t) = 0.$$

Por otro lado, derivando $x(t)\operatorname{sen}(2t) - y(t)\cos(2t) = \operatorname{sen} t$,

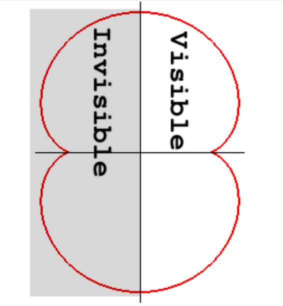
$$x'(t)\operatorname{sen}(2t) + 2x(t)\cos(2t) - y'(t)\cos(2t) + 2y(t)\operatorname{sen}(2t) = \cos t.$$

Despejando y usando fórmulas trigonométricas

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}\big(3\cos t - \cos(3t)\big) \\ y(t) = \frac{1}{4}\big(3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(3t)\big) \end{cases}} \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Con esta fórmula la podemos dibujar con precisión.

La nefroide



Con $\pi/2 < t < \pi$
y $-\pi/2 < t < -\pi$
se completa el "riñón".

La curva entera
se llama *nefroide*.

Parece haber un pico correspondiente al ángulo $t = 0$.

La singularidad

Recordando la fórmula

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}\big(3\cos t - \cos(3t)\big) \\ y(t) = \frac{1}{4}\big(3\,\mathrm{sen}\, t - \mathrm{sen}(3t)\big) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{3}{4}\big(-\mathrm{sen}\, t + \mathrm{sen}(3t)\big) \\ y'(t) = \frac{3}{4}\big(\cos t - \cos(3t)\big) \end{cases}$$

Para el ángulo $t = 0$ hay problemas: el vector tangente $(x'(t), y'(t))$ se anula. Por las aproximaciones $\mathrm{sen}\, x \approx x - x^3/6$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$ se deduce que cerca de cero

$$x(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t^2, \qquad y(t) \approx t^3$$

Por tanto

$$x(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(y(t))^{2/3}$$

que no es derivable como función de y.

Más información

- http://www.uam.es/fernando.chamizo/APcalculoIII.pdf (p.51)
- http://mathworld.wolfram.com/Nephroid.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Nephroid