Soluciones de Análisis Matemático II **24-Junio-08**

Problema 1. La superficie del enunciado es una superficie de nivel S de $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+e^{xyz}$. En cada punto (x,y,z) el gradiente $\nabla F(x,y,z) = (2x+yze^{xyz}, 2y+xze^{xyz}, 2z+xye^{xyz})$ es un vector normal a S. Entonces $\vec{n} = \nabla F(1,0,1) = (2,1,2)$ es un vector perpendicular al plano buscado, cuya ecuación será por tanto, $2(x-1)+1(y-0)+2(z-1) = 0$, esto es,

$$2x + y + 2z = 4.$$

El vector tangente $\vec{v}$ pedido es perpendicular a $\vec{n}$ y a $\vec{m} = (3,-1,-2)$, un vector normal al plano $3x-y-2z = 1$. Esto determina $\vec{v}$ como $\vec{n}\times\vec{m}$, salvo multiplicar por constantes no nulas. Un cálculo prueba

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} - 5\vec{k}.$$

Entonces $(0,2,-1)$ es una solución válida (el vector anterior por $1/5$).

Problema 2.

a) Los puntos críticos son en los que se anula el gradiente:

$$\nabla f = (4x+2y, 2x+y^2) = (0,0) \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = -y/2 \\ -y+y^2 = 0 \end{cases}$$

y la segunda ecuación da $y = 0, 1$ que lleva a los puntos críticos $(-1/2, 1)$ y $(0,0)$. Ninguno de ellos está en el interior de D.

b) Por el apartado anterior en el interior no hay puntos críticos y por tanto allí no se alcanzan ni máximos ni mínimos.

La frontera de D está formada por los puntos $(t,0)$, lado horizontal, $(0,t)$, lado vertical, $(t, 4-t)$, lado oblicuo, donde $0 \le t \le 4$. El mínimo y máximo de f en D serán por tanto el menor y el mayor de los valores alcanzados por las funciones de una variable

$$g_1(t) = f(t,0) = 2t^2, \quad g_2(t) = f(0,t) = \frac{t^3}{3}, \quad g_3(t) = f(t, 4-t) = 8t + \frac{(4-t)^3}{3} \quad \text{en } 0 \le t \le 4.$$

Es obvio que el mínimo de g_1 y g_2 en $[0,4]$ es $0 = g_1(0) = g_2(0) = f(0,0)$, mientras que los máximos son $32 = g_1(4) = f(4,0)$ y $64/3 = g_2(4) = f(0,4)$. Por otro lado $g_3(0) = 64/3$, $g_3(4) = 32$ y los posibles máximos y mínimos de $g_3(t)$ para $0 < t < 4$ se alcanzan cuando $g_3'(t) = 0$, esto es, $8-(4-t)^2 = 0$ que despejando lleva a $t = 4-\sqrt{8} = 4-2\sqrt{2}$, como $g_3''(4-2\sqrt{2}) > 0$ corresponde a un mínimo. Se tiene $g_3(4-2\sqrt{2}) = f(4-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 32(1-\sqrt{2}/3)$.

El mínimo de f en D será, como hemos mencionado, el menor de los mínimos en los lados: $f(0,0) = 0$, y el máximo el mayor de los máximos sobre los lados: $f(4,0) = 32$.

Problema 3.

a) [Dibujo no incluido. Descripción: Dos parábolas con las ramas hacia arriba que se cortan en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$. La parábola $y = 2x^2$ queda por debajo cuando $x \in [-1,1]$ es más estrecha y tiene su vértice en el origen mientras que $y = 1+x^2$ lo tiene en $(0,1)$].

b) Según lo descrito en el apartado anterior, en D se tiene $-1 \le x \le 1$ y para cada x la y varía entre $2x^2$ (la parábola de abajo) y $1+x^2$ (la de arriba), entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} (xy+y^2)\Big|_{y=2x^2}^{1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x - x^3 + 1 + 2x^2 - 3x^4)\,dx = 0 + 0 + 2 + \frac{4}{3} - \frac{6}{5} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Problema 4. Lo que se pide es el volumen bajo la gráfica de $z = x^2 + y^2$ (y sobre el plano XY) para $x^2+y^2 \le 9$, que es el interior del cilindro, y se puede expresar mediante la integral

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 9} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Empleando coordenadas polares se tiene

$$I = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\,d\alpha\,dr = 2\pi \int_0^3 r^3\,dr = 2\pi\frac{3^4}{4} = \frac{81\pi}{2}.$$

Problema 5. La parábola y la recta se cortan en $(-2,4)$ y $(2,4)$, y para $-2 \le x \le 2$ la parábola queda por debajo, por tanto la región de la que nos habla el enunciado es $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4\}$. Escribiendo, con la notación habitual, $P = y^2 - \tan x$ y $Q = 3x + \operatorname{sen} y$ el teorema de Green implica

$$I = \iint_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = \iint_R \big(3-2y\big)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} \big(3-2y\big)\,dy\,dx.$$

Integrando se obtiene

$$\int_{-2}^{2} \big(3(4-x^2) - (4^2 - x^4)\big)\,dx = \int_{-2}^{2} \big(-4 - 3x^2 + x^4\big)\,dx = -16 - 16 + \frac{64}{5} = -\frac{96}{5}.$$