Álgebra II Septiembre 1997 **Inicial del primer apellido**

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: $\underset{1}{\sqcup} + \underset{2}{\sqcup} + \underset{3}{\sqcup} + \underset{4}{\sqcup} + \underset{5}{\sqcup} = \square$

El nmero que precede a cada ejercicio o apartado indica su contribucin a la calificacin.

2 - **1)** Sea $P \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado 3 con una raz real, α_1, y otras dos, $\alpha_2, \alpha_3 \notin \mathbb{R}$, complejas conjugadas. Sabiendo que existe $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ (L =cuerpo de descomposicin de P) tal que $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$, $\sigma(\alpha_2) = \alpha_3$, $\sigma(\alpha_3) = \alpha_1$; demostrar que:

0'75 - i) $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$

0'75 - ii) P es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

0'5 - iii) $\left|\mathcal{G}\big(L/\mathbb{Q}(\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2\cdot\alpha_3)\big)\right| = 2$ y por tanto $[L : \mathbb{Q}(\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2\cdot\alpha_3)] = 2$.

1 - **2)** Hallar el grado de la extensin $K/\mathbb{Q}$ siendo K el cuerpo de descomposicin de $(x^2-x)(x^4-3)$ sobre $\mathbb{Q}$.

1 - **3)** Expresar $(x^3+x)(x^9-2)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{F}_3[x]$. (*Sugerencia*: Ntese que $9=3^2$).

1 - **4)** Hallar un generador del grupo de Galois de $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^4)$.

5 - **5)** Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

0'5 - i) La extensin $\mathbb{Q}(\pi+e)/\mathbb{Q}\big((\pi+e)^2+\pi+e\big)$ es algebraica.

0'5 - ii) Todo elemento de $K=\mathbb{Q}(e^{2\pi i/7})\cap\mathbb{R}$ es construible con regla y comps.

0'5 - iii) Si en un grupo de orden 6 existen dos elementos (ambos distintos del neutro) que conmutan, entonces dicho grupo es $\mathbb{Z}_6$.

0'5 - iv) Si L es el cuerpo de descomposicin de un polinomio de grado 4 sobre $\mathbb{Q}$ y $[L:\mathbb{Q}] > 12$, entonces $[L:\mathbb{Q}] = 24$.

0'5 - v) Si la longitud x es construible, entonces $\sqrt[4]{x^5 + x^3 + 1}$ tambin lo es.

0'5 - vi) El polgono de 51 lados es construible con regla y comps.

0'5 - vii) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})$.

0'5 - viii) El grupo alternado A_5 (de permutaciones pares en S_5) tiene subgrupos de todos los rdenes dividiendo a $|A_5| = 60$.

0'5 - ix) Un polinomio irreducible sobre $\mathbb{F}_{64}$ tambin lo es sobre $\mathbb{F}_8$.

0'5 - x) Si $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ es abeliano, $L/\mathbb{Q}$ es normal y $[L : \mathbb{Q}] = 12$, entonces para todo n que divida a 12 existe un subcuerpo L_n tal que $[L_n : \mathbb{Q}] = n$.