EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA II,
3^o MATEMÁTICAS

Martes, 13 de septiembre de 2005

Apellidos:______________________________ **Nombre:**___________________

D.N.I.:_______________________________________ **Grupo:**______________

Nota: Escribe un problema en cada hoja, y justifica **todas** tus respuestas.

---

1. (2 puntos) **a.** Describe todos los ideales de $\mathbb{Z}_{12}$.

b. ¿Cuáles de estos ideales son maximales?

c. ¿A qué anillo conocido es isomorfo $\mathbb{Z}_{12}/\langle 6\rangle$?

---

2. (2.5 puntos) **a.** Demuestra que $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3+x^2+1\rangle$ es un cuerpo.

b. Calcula una base de $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3+x^2+1\rangle$ sobre $\mathbb{Q}$.

c. Calcula el inverso de $\overline{x}$ en $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3+x^2+1\rangle$.

---

3. (2.5 puntos) Decide si cada uno de los siguientes enunciados es **verdadero** o **falso**. Justifica tus respuestas.

- **a.** Sea $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado 3, y sean $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ sus raíces. Entonces $\mathbb{Q}(\alpha)\simeq\mathbb{Q}(\beta)\simeq\mathbb{Q}(\gamma)$.
- **b.** Sea $p(x)\in K[x]$ un polinomio irreducible de grado 4, y sea L/K su cuerpo de descomposición. Entonces $4|[L:K]$.
- **c.** Sean $K\subset M\subset L$. Si L/K es normal, entonces M/K es normal.
- **d.** Los únicos cuerpos con característica 2 son $\mathbb{F}_{2^n}$ con $n\in\mathbb{N}$.

---

4. (3 puntos) Sea $L=\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})$.

- **a.** Demuestra que el único subcuerpo intermedio M con $\mathbb{Q}\underset{\neq}{\subseteq} M\underset{\neq}{\subseteq} L$ es $M=\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{5}))$. (*Indicación:* No es necesario calcular los subcuerpos intermedios).
- **b.** Demuestra que $[L(\sqrt{-3}):L]=2$. (*Indicación:* Usa el apartado (a)).
- **c.** Calcula $[L(\sqrt{-3}):\mathbb{Q}(\sqrt{-3})]$.
- **d.** Describe $\mathcal{G}(L(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$.