Algebra II. Examen final. 5 de Septiembre de 2002.

Nota: El examen dura 3 horas. Cada problema tiene que estar en una hoja separada. Cada hoja tiene que llevar el nombre y el número del grupo.

(i) (5 pts.) Considérese la extensión de cuerpos $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ sobre $\mathbb{Q}$.

a. Definir el grado de una extensión finita de cuerpos y, en particular, calcular el grado de F sobre $\mathbb{Q}$.

b. Discutir razonadamente si F sobre $\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois.

c. Obtener el grado del polinomio mínimo de $\sqrt{3} + i$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

d. Demostrar que el grupo de Galois de $F/\mathbb{Q}$ es isomorfo al grupo diédrico de orden 8.

e. Enunciar el teorema de la correspondencia de Galois entre subgrupos y subcuerpos de una extensión Galoisiana.

f. Encontrar una subextensión de $F/\mathbb{Q}$ normal y de grado 4. ¿Es única? Justificar la respuesta.

(ii) (1.5 pt.) Consideramos los anillos $F_1 = \mathbb{Q}[x]/(p(x))$ y $F_2 = \mathbb{Q}(i)[x]/(p(x))$, siendo $p(x) = x^2 + 4$.

a. Decidir justificadamente si F_1 y F_2 son cuerpos o no.

b. Decidir si $\overline{x^3 - 5}$ es un elemento invertible en F_2 y, en caso afirmativo, encontrar su inverso.

(iii) (1.5 pts.) Consideramos la extensión Galoisiana $K \subseteq K(u, u^2, u+v, u^2+1) = L$, siendo 2 y 3 los grados de los polinomios mínimos de u y v, respectivamente, sobre K.

a. Obtener razonadamente una base de L como espacio vectorial sobre K.

b. Demostrar que $L = K(u+v)$.

(iv) (2 pts.)

a. Supongamos que el polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tiene todas sus raíces reales y sea F el cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. ¿ Se puede asegurar que $\sqrt[3]{2} \notin F$? (Razonar la respuesta).

b. Sea F/K una extensión de Galois y su grupo de Galois $G = < \sigma, \tau >$. ¿ Qué se puede decir de un elemento $u \in F$ que cumple las condiciones: $\sigma(u) = u = \tau(u)$?