8/Abril/2005

Álgebra II

Apellidos y nombre ....

.... **DNI** (o pasaporte) _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Grupo** _____

1) Considérese la función $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ dada por $\phi\big(P(x)\big) = P(i)$.
a) (1 punto) Demostrar que es un epimorfismo (homomorfismo sobreyectivo).
b) (1'5 puntos) Dar un generador del ideal $\operatorname{Ker} \phi$.
c) (1'5 puntos) ¿Existe algún $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\mathbb{Z}[x]/\langle P(x)\rangle \cong \mathbb{Z}[i]$?

2) Sea el cuerpo $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
a) (2 punto) Estudiar si $x^7 - 2$ es el polinomio mínimo de $\sqrt[7]{2}$ sobre K.
b) (1'5 puntos) Estudiar si $x^8 - 2$ es el polinomio mínimo de $\sqrt[8]{2}$ sobre K.

3) (2'5 puntos) Si L/K es finita y $K \subset M \subset L$, probar que para cualquier $\alpha \in L$ se cumple $[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K] < \infty$.

Álgebra II. Soluciones parcial 2005

1) a) Las propiedades de homomorfismo son bastante inmediatas:

- $\phi(P+Q) = (P+Q)(i) = P(i) + Q(i) = \phi(P) + \phi(Q)$
- $\phi(PQ) = (PQ)(i) = P(i)Q(i) = \phi(P)\phi(Q)$
- $\phi(1) = 1$.

Es sobre porque dado cualquier $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, se tiene $\phi(bx + a) = a + bi$.

b) La inclusión $\langle x^2 + 1 \rangle \subset \text{Ker } \phi$ es clara porque todo múltiplo de $x^2 + 1$ se anula en $x = i$.

Por otra parte, si $P \in \text{Ker } \phi$ entonces al dividirlo por $x^2 + 1$ se obtiene $P(x) = (x^2 + 1)C(x) + bx + a$ que al sustituir $x = i$ lleva a $b = a = 0$ y por tanto P es divisible por $x^2 + 1$. En definitiva, $\text{Ker } \phi = \langle x^2 + 1 \rangle$.

c) Sea $P(x) = x^2 + 1$ y la aplicación $\psi : \mathbb{Z}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ dada por $\psi(\overline{P}) = P(i)$. Esta aplicación está bien definida porque si $\overline{P} = \overline{Q}$, entonces $P = Q + (x^2 + 1)R$ y por tanto $\psi(\overline{P}) = \psi(\overline{Q})$.

Gracias al primer apartado, ψ es un epimorfismo. Además es inyectiva, porque $\psi(\overline{P}) = 0 \Leftrightarrow P \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \overline{P} = \overline{0}$ (segundo apartado).

Errores comunes: a) La sobreyectividad, que contaba la mitad del problema, en muchos casos no está correctamente demostrada. Son muy frecuentes argumentos del tipo: “es sobreyectiva porque $\forall P(i) \in \mathbb{Z}[i]\ \exists P \in \mathbb{Z}[x] \ : \ \phi(P(x)) = P(i)$” o también “$P(i) \in \phi^{-1}(P(x))$”. Esto no concluye nada porque para cualquier función $f : X \longrightarrow Y$, sea sobreyectiva o no, siempre se puede decir que $f(z) \in Y$ implica que existe $z \in X$ que se aplica en $f(z)$, o que $z \in f^{-1}(f(z))$.

b) No tiene ningún sentido afirmar que Ker ϕ está generado por $x - i$ porque este polinomio ni siquiera está en $\mathbb{Z}[x]$.

c) Nótese que cocientes como $\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$ no son dominios de integridad, porque $\overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{0}$, por tanto no pueden ser isomorfos a $\mathbb{Z}[i]$. Un isomorfismo no sólo implica una biyección, sino también que las operaciones se preserven.

Comentario: Este apartado es consecuencia del teorema de isomorfía para anillos, aunque tal teorema no se ha demostrado en ninguno de los dos grupos era admisible aplicarlo.

---

2) a) Si no fuera el polinomio mínimo, existiría otro polinomio mónico en $K[x]$ de grado menor con $\sqrt[7]{2}$ como raíz y por tanto $[K(\sqrt[7]{2}) : K] < 7$.

Por otro lado,

$$[K(\sqrt[7]{2}) : K] = \frac{[K(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}]}{[K : \mathbb{Q}]} = \frac{[K(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[7]{2})]}{[K : \mathbb{Q}]}[\mathbb{Q}(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}].$$

El criterio de Eisenstein aplicado a $x^4 - 2$ y $x^7 - 2$ implica que estos polinomios son irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y se sigue $[K : \mathbb{Q}] = 4$ y $[\mathbb{Q}(\sqrt[7]{2}) : \mathbb{Q}] = 7$. De ello y de la igualdad anterior se deduce que $[K(\sqrt[7]{2}):K]$ es divisible por 7, en particular $[K(\sqrt[7]{2}):K] \geq 7$. Contradicción.

b) El polinomio de segundo grado $x^2 - \sqrt[4]{2}$ está en $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})[x]$ y tiene a $\sqrt[8]{2}$ por raíz, así que $x^8 - 2$ no es el polinomio mínimo.

Errores comunes: a) No es válida una explicación del tipo "es el polinomio mínimo porque $\sqrt[7]{2}$ no se puede poner en términos de $\sqrt[4]{2}$" o "$x^7 - 2$ es irreducible en K porque sus raíces no pertenecen a K". Nótese que las raíces de $P = x^4 - 5x^2 + 6$ no están en $\mathbb{Q}$ y sin embargo P no es irreducible: $P = (x^2-2)(x^2-3)$.

b) No era necesario (aunque no es incorrecto) probar que $x^2 - \sqrt[4]{2}$ es el polinomio mínimo.

---

3) Como L/K es finita, α es algebraico sobre K y sobre M. Por tanto las extensiones $K(\alpha)/K$ y $M(\alpha)/M$ tienen grados igual a los grados de los respectivos polinomios mínimos de α sobre K y sobre M; en particular son finitas.

Digamos que estos polinomios mínimos son $P \in K[x]$ y $Q \in M[x]$ respectivamente. De la inclusión $K \subset M$ se sigue $P \in M[x]$, y como $P(\alpha) = 0$, por la definición de polinomio mínimo, $\partial Q \leq \partial P$, equivalentemente, $[M(\alpha):M] \leq [K(\alpha):K]$.

Errores comunes: La división en casos $\alpha \in K$, $\alpha \in M$, $\alpha \notin M$ es innecesaria. Incluso en este último caso, no se cumple en general la desigualdad estricta $[M(\alpha):M] < [K(\alpha):K]$. La finitud de $K(\alpha)/K$, cuya prueba contaba $0'5$, no está asegurada usando sólo que es una extensión simple, por ejemplo $[\mathbb{Q}(\pi):\mathbb{Q}] = \infty$.
