Examen parcial de Álgebra II

Viernes, 26 de marzo de 2004

Apellidos: ______________________________ **Nombre:** __________________

D.N.I.: ____ **Grupo:** _________

Nota: Escribir un problema en cada hoja, y justificar todas las respuestas.

---

1. (1.5 puntos) Sea $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ la aplicación que a cada polinomio le asocia la suma de sus coeficientes, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[x] & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z} \\ a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n & \to & a_0 + a_1 + \ldots + a_n. \end{array}$$

a) Demostrar que ϕ es un homomorfismo de anillos. ¿Es ϕ un epimorfismo?

b) Calcular el núcleo de ϕ.

---

2. (2 puntos) Sea el conjunto $I = \{(2n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

a) Demostrar que I es un ideal maximal de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

b) Calcular $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/I$.

---

3. (1.5 puntos) Encontrar un polinomio mónico $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grado mayor o igual que 1, que sea **irreducible** en $\mathbb{Z}[x]$, pero que **no** sea irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$.

---

4. (2 puntos) Sea $A = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$.

a) Demostrar que A es un cuerpo.

b) Encontrar el inverso de $\overline{x+1} \in A$.

---

5. (1.5 puntos) Sea K un cuerpo y sea α un elemento algebraico sobre K tal que $[K(\alpha) : K] = 5$. Demostrar que $[K(\alpha^2) : K] = 5$.

---

6. (1.5 puntos) Hallar el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{3}})/\mathbb{Q}$.