EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA II, 3^o MATEMÁTICAS

Miércoles, 16 de junio de 2004

Apellidos:________________________________ **Nombre:**____________________

D.N.I.:____ **Grupo:**________________

Nota: Escribe un problema en cada hoja, y justifica todas tus respuestas.

---

1. (1.5 puntos) Sea $R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ un conjunto sobre el cual consideramos la suma y el producto módulo 10.

a. Probar que R es un cuerpo.

b. ¿Cuál es la característica de R?

c. ¿Qué cuerpo conocido es isomorfo a R?

---

2. (3 puntos) Calcular los grados de las siguientes extensiones:

a. $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2} + 5\sqrt[5]{4})/\mathbb{Q}$.

b. $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{-3}, \sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

c. $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{31}))/\mathbb{Q}$.

d. $L/\mathbb{F}_2$ con $L = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$.

---

3. (2.5 puntos) Decidir justificadamente si cada uno de los siguientes enunciados es **verdadero** o **falso**:

a. La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{\pi}})/\mathbb{Q}$ es radical.

b. Todos los ideales propios de $\mathbb{Z}[i]$ son maximales.

c. Si F es un cuerpo con 32 elementos, entonces los únicos subcuerpos de F son $\{0, 1\}$ y F.

d. Sea L el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de un polinomio irreducible de grado 3. Entonces $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ tiene un elemento de orden 3.

---

4. (3 puntos) Sea L el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de $x^4 - 7$.

a. Sin calcular $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$, justificar que no es abeliano.

b. Sean $\sigma, \gamma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ con

$$\sigma(\sqrt[4]{7}) = \gamma(-i\sqrt[4]{7}) = -\sqrt[4]{7}, \quad \sigma(i) = \gamma(-i) = i.$$

Hallar el cuerpo fijo por $\langle \sigma, \gamma \rangle$.