Algebra II. Examen final. 3 de Junio de 2003.

Nota: El examen dura 3 horas. Cada problema tiene que estar en una hoja separada. Cada hoja tiene que llevar el nombre y el número del grupo.

(i) (2 pts.) Sea I un ideal de $\mathbb{Q}[x]$ generado por x^3+x+1. Calcular el inverso de x^2+1+I en $Q[x]/I$.

(ii) (2 pts.) Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{11}i]$ y I ideal generado por 3 y $1+\sqrt{11}i$. Demostrar que I es un ideal maximal. A que cuerpo es isomorfo R/I.

(iii) (2 pts.) Sea $f(x) = x^4 - 4x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x]$. Calcular el grupo de Galois de f sobre $\mathbb{Q}$ y los cuerpos fijos por sus subgrupos.

(iv) (2 pts.)

a. Enunciar el teorema de la correspondencia de Galois entre subgrupos y subcuerpos de una extensión Galoisiana.

b. Sea ξ una raíz 67-ésima de unidad en $\mathbb{C}$. Demostrar que $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\xi^2+\xi^3)$.

(v) (2 pts.) Sea f un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ con el grupo de Galois abeliano y u una raíz de f en $\mathbb{C}$. Demostrar que el grado de f es primo si y sólo si no hay extensiones intermedias entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(u)$.