Algebra II. Examen final. 3 de Junio de 2002.

Nota: El examen dura 3 horas. Cada problema tiene que estar en una hoja separada. Cada hoja tiene que llevar el nombre y el número del grupo.

Todos los cuerpos considerados en el examen son de característica 0.

(i) (1 pt.) Descomponer 10 en producto de irreducibles dentro de $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

(ii) (1 pt.)¿Es verdad que si F/K es una extensión de grado n, entonces n elementos $u_1, \cdots, u_n$ forman una base de F como espacio vectorial sobre K si y sólo si para todo $1 \leq i \leq n$,

$$K(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_n) \subsetneqq F?$$

Justificar la respuesta dando una demostración o un contraejemplo.

(iii) (1 pt.) Sea $f \in K[x]$ un polinomio separable de grado 6 con grupo de Galois $G =< \alpha >$ cíclico y $u_1, \cdots, u_6$ sus raíces. Supongamos que α actúa de la siguiente forma sobre las raíces:

$$\alpha(u_1) = u_3, \alpha(u_2) = u_4, \alpha(u_3) = u_5, \alpha(u_4) = u_2, \alpha(u_5) = u_1.$$

Demostrar que f no es irreducible en $K[x]$ y calcular los grados des sus factores irreducibles.

(iv) (3 pt.) Sea $F = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}, i)$.

a. Demostrar que $F/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois y demostrar que su grupo de Galois es isomorfo al grupo diédrico de orden 12.

b. Demostrar que F es el cuerpo de descomposicón de $x^3 + \sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

c. Encontrar un subcuerpo intermedio $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq F$ tal que $E/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois de grado 6.

(v) (2 pt.) Sea F/K es una extensión de Galois con grupo de Galois isomorfo al grupo de permutaciones de tres elementos.

a. Demostrar que F es el cuerpo de descomposición de un polinomio de grado 3 sobre K.

b. Dar un contraejemplo que pruebe que el recíproco no es cierto.

(vi) (2 pt.) Sea $f \in K[x]$ un polinomio irreducible, F su cuerpo de descomposición y $a \in F$ una raíz de f.

a. Demostrar que si F/K tiene grupo de Galois abeliano, entonces $F = K(a)$.

b. ¿Es cierta la implicación inversa? Justificar la respuesta dando una demostración o un contraejemplo.