Algebra II. Examen final. Febrero de 2003.

Nota: El examen dura 3 horas. Cada problema tiene que estar en una hoja separada. Cada hoja tiene que llevar el nombre y el número del grupo.

Todos los cuerpos considerados en el examen son de característica 0.

(i) (5 pts.) Considérese la extensión de cuerpos $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i)$ sobre $\mathbb{Q}$ y sea F la menor extensión de Galois que contiene a K.

a. Definir el grado de una extensión finita de cuerpos y, en particular, calcular el grado de F sobre $\mathbb{Q}$.

b. Discutir razonadamente si K sobre $\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois.

c. Obtener el grado del polinomio mínimo de $\sqrt[6]{3} + i$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.

d. Demostrar que el grupo de Galois de $F/\mathbb{Q}$ es isomorfo al grupo diédrico de orden 12.

e. Enunciar el teorema de la correspondencia de Galois entre subgrupos y subcuerpos de una extensión Galoisiana.

f. Encontrar una subextensión de $F/\mathbb{Q}$ normal y de grado 4. ¿Es única? Justificar la respuesta.

(ii) (1.5 pt.) Sean $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois finita y $L/\mathbb{Q}$ una subextensión tal que $|K : L| = 2$. Decidir razonadamente si $L/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois.

(iii) (1.5 pt.) Dar la definición de anillo cociente. Sean $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ y I ideal de R generado por 7. Decidir razonadamente si R/I es un cuerpo.

(iv) (2 pt.) Sea K una extensión finita de $\mathbb{Q}$. Demostrar que cualquier homomorfismo de cuerpos $\phi : K \to K$ es un automorfismo.