Álgebra II Febrero 1997 **Inicial del primer apellido** $\square$

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: $\underset{1}{\sqcup} + \underset{2}{\sqcup} + \underset{3}{\sqcup} + \underset{4}{\sqcup} + \underset{5}{\sqcup} = \square$

1) Sea $P \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible y sea L su cuerpo de descomposicin. Sabiendo que $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

0'5 - i) Cuntos subcuerpos propios conteniendo a $\mathbb{Q}$ tiene L?

0'5 - ii) Hallar el grado de P.

1 - **2)** Sabiendo que $\sigma : \zeta \mapsto \zeta^2$, con $\zeta = e^{2\pi i/13}$, es un generador de $\mathcal{G}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$, demostrar que

$$x = (\zeta + \zeta^8 + \zeta^{12} + \zeta^5)^6 + (\zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^{11} + \zeta^{10})^6 + (\zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^9 + \zeta^7)^6$$

pertenece a $\langle\sigma\rangle'$ y concluir que $x \in \mathbb{Q}$.

3) Si $p > 2$ es primo

0'5 - i) Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2})/\mathbb{Q}$ no es normal.

0'5 - ii) Utilizando el apartado anterior, demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2})$ no es subcuerpo de $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/q})$ con q primo.

1 - **4)** Sabiendo que $\mathcal{G}(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/12})/\mathbb{Q})$ est generado por $\sigma_5 : e^{2\pi i/12} \mapsto e^{10\pi i/12}$ y $\sigma_{11} : e^{2\pi i/12} \mapsto e^{22\pi i/12}$, hallar σ tal que $\langle\sigma\rangle = \mathcal{G}\big(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/12})/\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3})\big)$.

5) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

0'5 - i) La extensin $\mathbb{Q}(\pi^2)/\mathbb{Q}(\pi^4 - \pi^2 + 1)$ es algebraica.

0’5 - ii) El orden del grupo de Galois de un polinomio de grado n tiene orden menor o igual que n.

0’5 - iii) La longitud $\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}$ es construible con regla y comps.

0’75 - iv) $\sqrt{111}$ no pertenece a $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{11})$.

0’75 - v) Si el grupo de Galois de $P\in\mathbb{Q}[x]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_3\times S_3$, entonces P es soluble por radicales.

0’5 - vi) El polgono de siete lados es construible con regla y comps.

0'5 - vii) Si P es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, entonces tambin lo es en $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

0'5 - viii) $x^3 - 7$ es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})[x]$.

0'5 - ix) $x^3 - 7$ es irreducible en $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}\sqrt[3]{7})[x]$.

0'5 - x) $x^2 - 6$ es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})[x]$.

0'5 - xi) $x^2 + 8$ es irreducible en $\mathbb{F}_{11}[x]$.