Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Grupo..................

Calificación: $\underset{1}{\underline{\quad\quad}} + \underset{2}{\underline{\quad\quad}} + \underset{3}{\underline{\quad\quad}} = \boxed{\quad}$

1) Sea L el cuerpo de descomposición de $x^7 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

0'5 - i) Sea $\xi = e^{2\pi i/7}$ y $\sigma \in \mathcal{G}(L/K)$ definido por $\sigma(\xi) = \xi^3$. Demostrar que σ genera todo el grupo de Galois.

0'75 - ii) Hallar generadores para cada uno de los subgrupos propios de $\mathcal{G}(L/K)$.

1 - iii) Hallar todos los subcuerpos $\mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} M \underset{\neq}{\subset} L$.

0'75 - iv) Sea $\beta = 7/(9+\xi^3+\xi^5+\xi^6)$. Demostrar que β pertenece a una extensión de grado dos sobre $\mathbb{Q}$.

2) Calcular razonadamente el grado del cuerpo de descomposición de los polinomios

0'5 - i) $x^5 - 3$ sobre $\mathbb{Q}$.

0'5 - ii) $x^6 - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

0'5 - iii) $(x^3-2)(x^2+x+1)$ sobre $\mathbb{Q}$.

0'5 - iv) x^4+x^3+x sobre $\mathbb{F}_2$.

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara)..

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

3) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

0'5 - i) El polinomio $x^2 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{F}_2[x]$ y también en $\mathbb{F}_8[x]$.

0'5 - ii) $\pi^3 + \pi + 1$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.

0'5 - iii) En S_4 todos los subgrupos de orden 4 son isomorfos.

0'5 - iv) Si $x > 0$ es construible con regla y compás, $\sqrt[4]{x}$ también lo es.

0'5 - v) Un subgrupo abeliano de un grupo no abeliano es siempre normal.

0'5 - vi) Existen al menos 6 permutaciones de S_5 que conmutan con $(1, 2)$.

0'5 - vii) Si $K \subset M \subset L$, L/K normal $\Rightarrow$ M/K normal.

0'5 - viii) En $\mathbb{F}_{p^n}$ hay exactamente p elementos que quedan fijos por el automorfismo de Frobenius $\phi(x) = x^p$.

0'5 - ix) Si $L/\mathbb{Q}$ es normal y $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ es abeliano, entonces $x^3 - 2$ es irreducible en $L[x]$.

0'5 - x) El polígono de 11 lados es construible con regla y compás.