Inicial del primer apellido ☐

Nombre y Apellidos (por favor, con letra clara) ....

.... D.N.I. (o pasaporte)..............................

Calificación: $\underset{1}{\lfloor\quad\rfloor} + \underset{2}{\lfloor\quad\rfloor} + \underset{3}{\lfloor\quad\rfloor} =$ ☐

1) Sea L el cuerpo de descomposición de $P = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 21x^2 + 22x - 5$ sobre $\mathbb{Q}$. Sabiendo que $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong D_8$ y que P tiene una raíz $\alpha \in \mathbb{R}^+$, resolver los siguientes apartados

0'5 - i) Demostrar que P es soluble por radicales.

0'75 - ii) Demostrar que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \neq 6$ y deducir que P no es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

0'75 - iii) Demostrar que $L/\mathbb{Q}$ admite una subextensión $M/\mathbb{Q}$ que no es normal.

0'5 - iv) Demostrar que α es construible con regla y compás.

2) Sea L el cuerpo de descomposición de $x^{11}-1 \in \mathbb{Q}[x]$.

0'5 - i) Hallar el orden de $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ y demostrar que $\sigma \in \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ dado por $\sigma(\zeta)=\zeta^2$, $\zeta = e^{2\pi i/11}$, tiene orden mayor que 5 y por tanto genera $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$.

0'75 - ii) Demostrar que

$$\frac{(\zeta^4+\zeta^5+\zeta^9+\zeta^3+\zeta)(\zeta^8+\zeta^{10}+\zeta^7+\zeta^6+\zeta^2)}{(\zeta^4+\zeta^5+\zeta^9+\zeta^3+\zeta)^{100}+(\zeta^8+\zeta^{10}+\zeta^7+\zeta^6+\zeta^2)^{100}}$$

pertenece a $\mathbb{Q}$.

0'5 - iii) Demostrar que $M_1=\mathbb{Q}(\sqrt[7]{3})$ no es un cuerpo intermedio $\mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} M_1 \underset{\neq}{\subset} L$.

0'75 - iii) Demostrar que $M_2=\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$ no es un cuerpo intermedio $\mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} M_2 \underset{\neq}{\subset} L$.

3) Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

0'5 - i) $\mathbb{F}_4$ no está contenido en $\mathbb{F}_{32}$

0'5 - ii) El polígono de 37 lados es construible con regla y compás.

0'5 - iii) S_4 tiene al menos 7 subgrupos de orden 2.

0'5 - iv) $x^5 + 2x^2 + 2x + 2$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}(\sqrt[17]{2})$.

0'5 - v) $\mathbb{Q}(\pi + e, \pi - e)/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica.

0'5 - vi) El grado del cuerpo de descomposición de $x^4 - 9$ sobre $\mathbb{Q}$ es 4.

0'5 - vii) $\sigma(x) = x^6$ es un automorfismo de $\mathcal{G}(\mathbb{F}_{81}/\mathbb{F}_3)$.

0'5 - viii) El grado de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{3} + 2\sqrt[4]{3}, 2\sqrt{3} + 5\sqrt[4]{3} + 7\sqrt[8]{3})/\mathbb{Q}$ es 8.

0'5 - ix) Si $\mathbb{Q} \subset M \subset L$ con $L/\mathbb{Q}$ normal y finita y $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$ abeliano, entonces $M/\mathbb{Q}$ tiene las mismas propiedades.

0'5 - x) Dos polinomios de igual grado irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ tienen cuerpos de descomposición isomorfos.