

Proyecciones ortogonales

Álgebra II

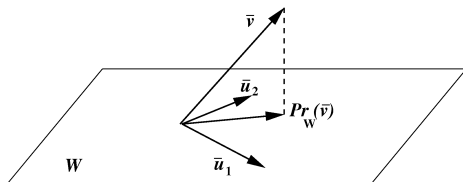
1º Ingeniería Informática 2008–2009

<http://www.uam.es/fernando.chamizo>

Índice

La proyección ortogonal

Geoméricamente



Algebraicamente

Si $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ es base ortogonal

$$Pr_W(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_2\|^2} \vec{w}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_n \rangle}{\|\vec{w}_n\|^2} \vec{w}_n.$$

La clave para muchas de las aplicaciones

$\text{Pr}_W(\vec{v})$ es el vector de W más cercano a \vec{v} .

La cercanía depende de la manera de medir

El vector $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$ está lejos del $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con el producto escalar usual pero está sólo a una décima con el producto escalar

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 / 1000 + x_2 y_2.$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

En las aplicaciones la idea es ajustar el producto escalar de forma que las diferencias notables tengan norma grande y las diferencias irrelevantes tengan norma pequeña.

Aproximando

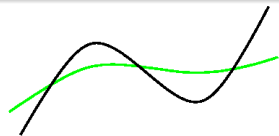
En el espacio de funciones continuas $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg.$$

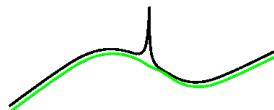
La distancia asociada mide la diferencia promedio

$$d(f, g) = \|f - g\| = \int_{-1}^1 (f - g)^2.$$

Toma en cuenta aspectos globales, no fenómenos locales.



Lejos



Cerca

Consideramos el subespacio $W = \mathbb{R}_5[x]$

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \xrightarrow{\text{ortogonalización}} \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$$

donde

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_1 = x,$$

$$Q_2 = x^2 - \frac{1}{3},$$

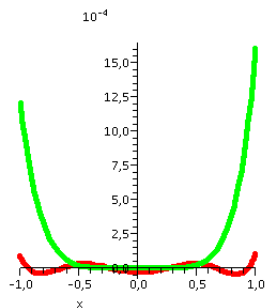
$$Q_3 = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$Q_4 = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35},$$

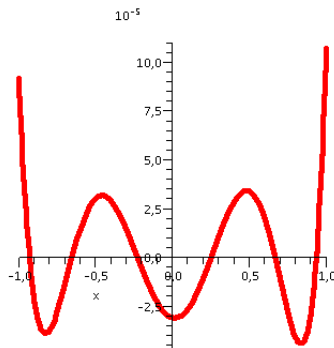
$$Q_5 = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x.$$

Aproximación de $f(x) = e^x$ por su proyección ortogonal comparada con Taylor de grado 5.

$$Pr = 1,00003 + 1,00001x + 0,49935x^2 + 0,16651x^3 + 0,04359x^4 + 0,00866x^5$$



Error en proyec. ort.

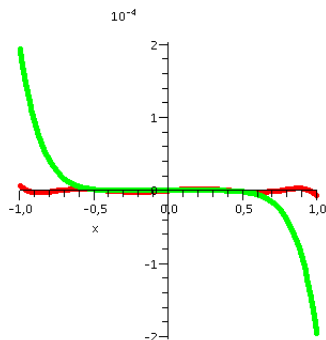


Error máximo: Taylor $\approx 10^{-3}$,

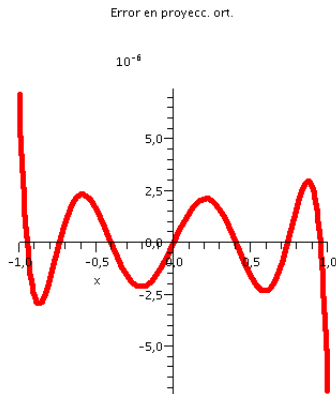
Proyección $\approx 10^{-4}$

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$Pr = 0,99997x - 0,16648x^3 + 0,00798x^5$$



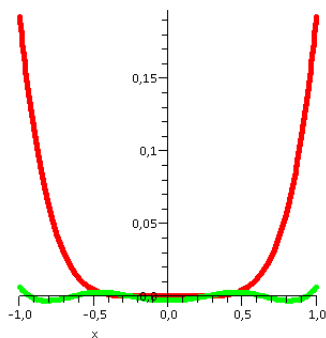
Error máximo: Taylor $\approx 10^{-4}$,



Proyección $\approx 10^{-5}$

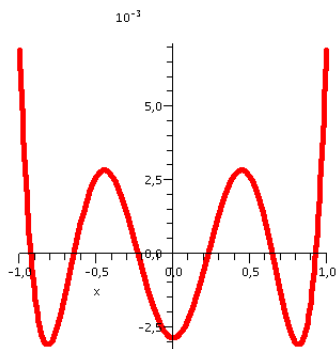
$$f(x) = \log(1 + x^2)$$

$$Pr = 0,00286 + 0,93308x^2 - 0,24973x^4$$



Error máximo: Taylor $\approx 10^{-1}$,

Error en proyecc. ort.



Proyección $\approx 10^{-3}$

Mejorando la aproximación

Los errores mayores ocurren en los extremos. Inventemos una forma de medir con la que los extremos tengan más peso

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ortogonalización

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_1 = x,$$

$$Q_2 = x^2 - \frac{1}{2},$$

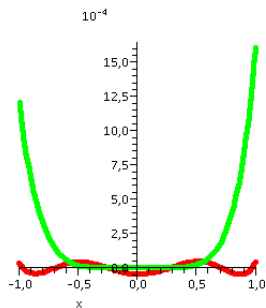
$$Q_3 = x^3 - \frac{3}{4}x,$$

$$Q_4 = x^4 - x^2 + \frac{1}{8},$$

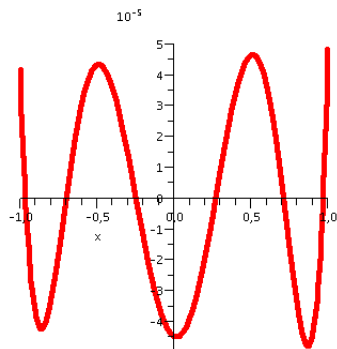
$$Q_5 = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x.$$

$$f(x) = e^x$$

$$Pr = 1,00004 + 1,00002x + 0,49919x^2 + 0,16648x^3 + 0,04379x^4 + 0,00868x^5$$



Error en proyec. ort.

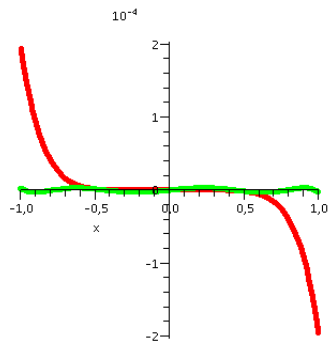


Error máximo: Taylor $\approx 10^{-3}$,

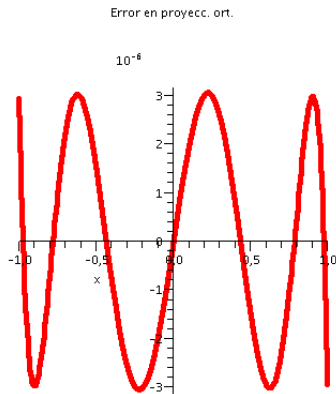
Proyección $\approx 10^{-4}$

$$f(x) = \sin x$$

$$Pr = 0,9999787193 x - 0,1664965543 x^3 + 0,007991788488 x^5$$



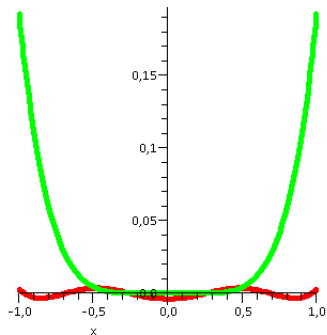
Error máximo: Taylor $\approx 10^{-4}$,



Proyección $\approx 10^{-6}$

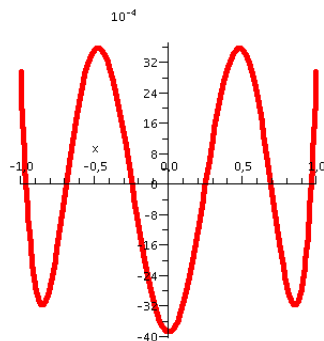
$$f(x) = \log(1 + x^2)$$

$$Pr = 0,00386980667 + 0,9217895249 x^2 - 0,2354980195 x^4$$



Error máximo: Taylor $\approx 10^{-1}$,

Error en proyecc. ort.

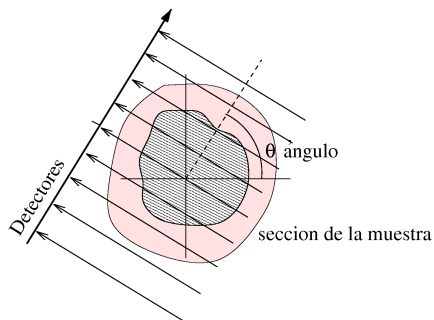


Proyección $\approx 10^{-3}$

Tomografía axial computerizada (1971)

Modelo físico

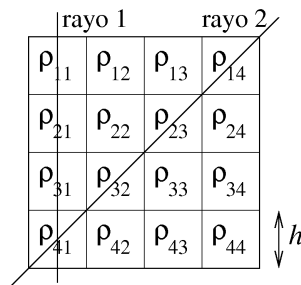
La atenuación de la intensidad de los rayos X depende de la integral de las densidades atravesadas.



$$\log(I_{in}/I_{out}) = \int_L \rho$$

Modelo matemático

Se discretizan las densidades descomponiendo en una malla y se aproxima la integral por una suma.



$$\log(I_{in}/I_{out}) = h(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{31} + \rho_{41})$$

$$\log(I'_{in}/I'_{out}) = h\sqrt{2}(\rho_{41} + \rho_{32} + \rho_{23} + \rho_{14})$$

Reconstrucción algebraica

Obtenemos un sistema de ecuaciones que al resolverlo nos da una aproximación de las densidades. Con este método, llamado *reconstrucción algebraica*, podemos hacer tomografías no destructivas.

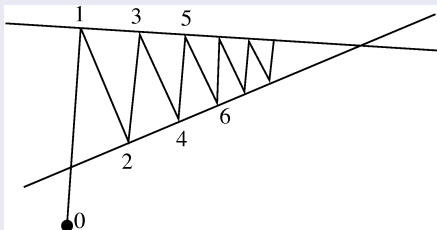
Dificultades prácticas

- **Sistema lineal muy grande:** En las primeras tomografías se empleaban más de 25000 ecuaciones.
- **Sistema incompatible:** Debido a la redundancia en las mediciones y los errores experimentales el sistema y típicamente incompatible.

El algoritmo de Kaczmarz (1937)

Es un método iterativo para resolver sistemas lineales calculando proyecciones sucesivas sobre los hiperplanos que definen las ecuaciones.

Sistema compatible determinado



Las fórmulas dependen de la proyección ortogonal.

Teorema

Sea un sistema compatible determinado de $N \times N$

$$\vec{f}_1 \cdot \vec{x} = b_1, \quad \vec{f}_2 \cdot \vec{x} = b_2, \quad \vec{f}_3 \cdot \vec{x} = b_3, \quad \dots \dots \vec{f}_N \cdot \vec{x} = b_N.$$

Introduciendo las aplicaciones $L_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$L_i(\vec{x}) = P_i(\vec{x}) + b_i \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2} \quad \text{con} \quad P_i(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{f}_i \cdot \vec{x}) \frac{\vec{f}_i}{\|\vec{f}_i\|^2},$$

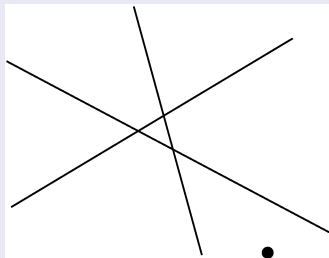
se tiene que, para cualquier $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, el algoritmo iterativo

$$\vec{x}_{n+1} = (L_N L_{N-1} \cdots L_1)(\vec{x}_n)$$

genera una sucesión que converge a la solución del sistema.

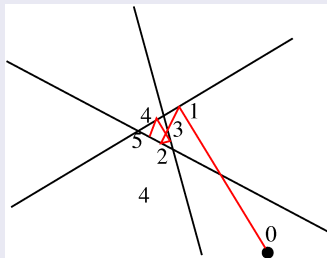
Pero la gracia del algoritmo es que permite “resolver” aproximadamente sistemas incompatibles.

Sistema incompatible



Pero la gracia del algoritmo es que permite “resolver” aproximadamente sistemas incompatibles.

Sistema incompatible



Comentarios

- Hay otros métodos matemáticos para hacer tomografías empleando conceptos más complicados (p.ej. la transformada de Radon).
- Las resonancias magnéticas nucleares, como su nombre indica, no se basan en rayos X. Emplean efectos cuánticos (y de nuevo muchas matemáticas).