ÁLGEBRA LINEAL

Curso 2007-2008

1 Introducción

Se recogen aquí algunos comentarios que pueden servir como guía para entender la organización de la parte práctica de esta asignatura.

1. Esta colección de ejercicios y problemas modifica la que elaboraron los profesores de la asignatura durante el curso 2000-2001 (José Luis Fernández y Omar Gil).
2. La mayor diferencia, aparte de que se ha ampliado ligeramente, es que parte de los ejercicios están resueltos, o, al menos, se dan algunas indicaciones para su resolución. Todo ello realizado por el profesor Rafael Hernández el curso 2006-2007.
3. Muchos de los ejercicios se adaptan al siguiente esquema:

   (a) PLANTEAMIENTO: Se trata de determinar los sistemas de ecuaciones lineales que hay que resolver. Gran parte de los ejercicios de Álgebra Lineal se reducen, de una forma u otra, a sistemas de ecuaciones lineales.

   Es muy conveniente, **y se pedirá en los exámenes de la asignatura**, indicar explícitamente los argumentos que llevan del enunciado de un problema al sistema de ecuaciones que debemos resolver.

   Es claro que un planteamiento incorrecto no puede llevar, sino por pura casualidad, a un resultado correcto.

   (b) CÁLCULOS: Aquí se trata de resolver, generalmente mediante reducción gaussiana, el sistema de ecuaciones encontrado. Esta parte es la más mecánica: la reducción gaussiana es un algoritmo que, dado un sistema de ecuaciones, nos proporciona, siempre, su solución en forma de una parametrización.

   Dado que la reducción gaussiana se realiza siempre de la misma forma, no repetiremos esta parte para cada ejercicio, sino que utilizaremos directamente la solución.

   (c) INTERPRETACIÓN: Supongamos que ya hemos calculado la parametrización de la solución del sistema de ecuaciones.

   En ocasiones, no está totalmente claro cómo se obtiene la solución al problema inicial a partir de la solución del sistema de ecuaciones. Esta es una etapa, en cierto sentido, **simétrica** de la primera. Aunque se resuelva correctamente el sistema de ecuaciones, si no se ha entendido bien el planteamiento, pueden cometerse errores tontos en esta última parte del problema.

4. Incluyo una lista de los **cálculos básicos** que hay que aprender a efectuar en este curso. De todos hay ejemplos resueltos en la colección, y conviene que indiquéis, a la izquierda de cada tipo en la lista, los números de los ejercicios en los que se explica cómo resolverlo.

   Dado que se trata de cálculos, todos los espacios vectoriales mencionados son k^n, para algún $n \in \mathbb{N}$ y k el cuerpo de los números racionales o un cuerpo finito.

   - ☐ **Resolver un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones** : Algoritmos de Gauss y de Gauss-Jordan. Encontrar la parametrización de la solución.
   - ☐ **Resolver sistemas lineales de ecuaciones** , no necesariamente homogéneos.
   - ☐ Efectuar correctamente las **operaciones con matrices**, y, en particular, el producto.
   - ☐ **Invertir matrices** invertibles.
   - ☐ Encontrar **generadores** del subespacio solución de un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones.
   - ☐ Dado un conjunto finito S de n-uplas, **encontrar un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones** cuya solución sea la clausura lineal $< S >$ de S. Encontrar generadores del **anulador**, $< S >^0$ de $< S >$.
   - ☐ Decidir si un conjunto finito S de n-uplas **es, o no, libre.**

- ☐ Dado un conjunto finito S de n-uplas, encontrar **una base** de su clausura lineal $< S >$. Calcular la **dimensión** de $< S >$. *Ver los ejercicios 28 y 30.*
- ☐ **Completar un conjunto libre** de vectores **a una base**.
- ☐ Decidir si **dos subespacios**, dados mediante generadores, **son iguales**. Decidir si uno es **subespacio del otro**.
- ☐ Calcular (generadores de) la **intersección** de subespacios, con los datos en forma de generadores o un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones .
- ☐ Calcular (generadores de) la **suma** de subespacios, con los datos generadores o sistema lineal y homogéneo de ecuaciones .
- ☐ Calcular (generadores de) un **subespacio suplementario**, no es único, de un subespacio dado mediante generadores.
- ☐ Calcular la base dual de una base dada. Calcular la matriz dual de una matriz dada.
- ☐ Calcular el **rango** de una matriz.
- ☐ Calcular una **base del cociente** de k^n por un SEV.
- ☐ Calcular determinantes, usando sustituciones de filas o columnas para reducir la matriz a forma triangular.
- ☐ En dimensión pequeña, resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer.
- ☐ Calcular las coordenadas de un vector en una base, dadas las coordenadas en otra.
- ☐ Dada una aplicación lineal, mediante una serie de datos que la determinan, encontrar la matriz de la aplicación en una base dada.
- ☐ Calcular la matriz de una aplicación lineal en una base, dada la matriz en otra. Aplicar correctamente las fórmulas de cambio de base.
- ☐ Calcular el polinomio característico de una matriz.
- ☐ Calcular los valores propio racionales, hallando las raices racionales del polinomio característico.
- ☐ Calcular, resolviendo el SHE, el subespacio propio que corresponde a un valor propio.
- ☐ Decidir si una aplicación lineal $u : E \to E$ es diagonalizable. Si lo es, diagonalizarla. Calcular también la base en que diagonaliza y la matriz de cambio de base.
- ☐ Calcular, el menos en dimensión 2,3 y 4, formas canónicas de Jordan, bases de Jordan y matrices de cambio de base.

5. Lo que tienen en común estos tipos de ejercicios es que todos ellos admiten **algoritmos** para su resolución, y, para casi todos, el algoritmo reduce el problema a aplicar el algoritmo de Gauss a un cierto sistema o matriz.

2 Sistemas lineales

1. **Homogeneización:** dado un sistema no homogéneo, es decir, con algún término independiente no nulo, y con incógnitas $x_1, \dots, x_n$, le podemos asociar un sistema homogéneo con una incógnita más, t, sin más que multiplicar todos los términos independientes por t.
2. **Deshomogeinización:** Hay una correspondencia biyectiva entre las soluciones del sistema no homogéneo y las soluciones del homogéneo asociado en las que $t = 1$.

   El sistema no homogéneo es incompatible, no tiene solución, si y sólo si toda solución del homogéneo asociado tiene $t = 0$.
3. Después de efectuar la reducción gaussiana, llamamos **variables pivote** a las variables que son las primeras con coeficiente no nulo en su ecuación, y **variable libres o parámetros** al resto.
4. La reducción gaussiana y posterior sustitución, o la reducción de Gauss-Jordan, nos dan una parametrización de la solución en la que las variables pivote se escriben en función de las libres.

   Obtenemos **todas** las soluciones dando **todos** los valores posibles a las variables libres y a las variables pivote los valores que se deducen de la parametrización.

1. *(*) Utilizar el método de Gauss para resolver el sistema lineal cuadrado:*

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & -8x_2 & -x_3 & & = & 3 \\ 3x_1 & -9x_2 & +4x_3 & & = & 7 \end{array} \qquad (1)$$

SOLUCIÓN:
El sistema homogéneo asociado es

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2t & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +t & = & 0 \\ 2x_1 & -8x_2 & -x_3 & & -3t & = & 0 \\ 3x_1 & -9x_2 & +4x_3 & & -7t & = & 0 \end{array} \qquad (2)$$

y una reducción gaussiana de él es

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2t & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3t & = & 0 \\ & & -x_3 & & +7t & = & 0 \\ & & & -6x_4 & +6t & = & 0 \end{array} \qquad (3)$$

La parametrización de la solución del sistema (2), **que se obtiene despejando en (3), empezando por abajo, las variables pivote y sustituyendo en las otras ecuaciones de (3)**, debe ser

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & -43t \\ x_2 & = & -12t \\ x_3 & = & 7t \\ x_4 & = & t \end{array} \qquad (4)$$

Obtenemos la solución del sistema (1) haciendo $t = 1$ en la parametrización obtenida.

1. ¿Qué transformaciones elementales hemos realizado para obtener la forma reducida (3)?
2. Comprobar que obtenemos **otra forma reducida diferente** si utilizamos otra sucesión de trensformaciones elementales.
3. Comprobar, sustituyendo en las ecuaciones, que la parametrización satisface el sistema homogéneo (2), y que la solución encontrada para el sistema (1) es realmente solución.

2. *Resolver simultáneamente los siguientes sistemas que tienen la misma matriz de coeficientes, pero diferentes términos independientes, utilizando el método de Gauss-Jordan:*

$$\begin{array}{rrrcrrr} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1, & 1, & 8 \\ -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & -5, & -3, & -14 \\ 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 5, & 1, & 14 \end{array}$$

3. *Describir* todas *las soluciones de los sistemas siguientes, utilizando Gauss-Jordan para reducir a forma escalonada reducida.*

a)

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -8x_2 & +2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & -7x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

b) (*)

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & -2x_3 & +x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 0 \\ 9x_1 & -3x_2 & -x_3 & -7x_4 & = & 4 \end{array} \tag{5}$$

c)

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +7x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +9x_2 & -7x_3 & = & 4 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & +6x_2 & -8x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:
b) La reducción de Gauss-Jordan del sistema homogéneo asociado al dado es

$$\begin{array}{ccccrcl} x_1 & & & & +8t & = & 0 \\ & x_2 & & +(5/2)x_4 & +23t & = & 0 \\ & & x_3 & -(1/2)x_4 & +7t & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

de donde, despejando las variables pivote y haciendo $t = 1$, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -8 \\ x_2 & = & -(5/2)x_4 - 23 \\ x_3 & = & (1/2)x_4 - 7 \end{array} \tag{7}$$

1. Comprobar, sustituyendo en (5), que la parametrización calculada es, para todo valor de x_4, una solución.
2. **La reducción de Gauss-Jordan de un sistema es única.** No importa cómo hagamos las transformacionmes elementales, siempre obtenemos la misma matriz reducida. ¿Por qué?

4. *(*) Resolver el sistema*

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & & +z & = & 12 \\ x & +4y & -z & = & 2 \\ 5x & -3y & +4z & = & 1 \end{array}$$

sobre el cuerpo finito, con trece elementos, $\mathbb{Z}_{13}$ y sobre $\mathbb{Q}$. ¿Cuál es la relación entre las dos soluciones?

SOLUCIÓN:
Sobre $\mathbb{Z}_{13}$ la solución es

$$x = 1, \ y = 9, \ z = 9$$

y sobre $\mathbb{Q}$
$$x = 73/8,\ y = -45/8,\ z = -123/8.$$

Una vez obtenida las soluciones, conviene, para comprobar el resultado, sustituir los valores obtenidos en las ecuaciones del sistema.

5. (*) Estudiar el sistema

$$\begin{array}{rrrcl} x & by & +az & = & 1 \\ ax & +by & +z & = & a \\ x & +aby & +z & = & b \end{array}$$

según los valores de los parámetros a y b.

SOLUCIÓN:
La eliminación gaussiana de la matriz del sistema homogeneizado nos da, suponiendo $b \neq 0$ y $a \neq 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & b & a & -1 \\ 0 & b-ab & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-b \end{pmatrix}.$$

Hay que tratar los casos $b = 0$ ó $a = 1$ aparte.

6. *Estudiar el sistema homogéneo con matriz*

$$\begin{pmatrix} x & b & a & b \\ b & x & b & a \\ a & b & x & b \\ b & a & b & x \end{pmatrix}.$$

3 Matrices

NOTACIONES:

1. La matriz identidad $n \times n$, unos en la diagonal y ceros fuera de ella, se denota por I_n.
2. La matriz nula $n \times n$, ceros en todas las entradas, se denota por 0_n.
3. El producto λA de un número, λ, por una matriz, $A = (a_{ij})$, es la matriz (λa_{ij}).
4. A^T denota la matriz transpuesta de la matriz A: si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ji})$. La matriz transpuesta tiene por i-ésima fila la i-ésima columna de A. También se puede utilizar A^t para denotar la transpuesta.
5. La suma de matrices se realiza componente a componente, para obtener la matriz $A+B := (a_{ij}+b_{ij})$. Las dos matrices deben tener el mismo número de filas y columnas. Se verifica que $(A+B)^T = A^T+B^T$, pero (CUIDADO!!) NO que $(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$.
6. Indicamos el producto de matrices simplemente escribiendo juntas ambas matrices, en la forma AB. Para poder efectuar este producto es necesario que, si A es $m \times n$ y B es $k \times \ell$, se verifique $n = k$. Se verifica que $(AB)^T = B^T A^T$, y también, si A y B son invertibles, que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
7. El producto de matrices no es, en general conmutativo, pero si es asociativo y distributivo respecto a la suma, es decir, se verifica
$$\begin{array}{rcl} A(BC) & = & (AB)C \\ A(B + C) & = & AB + AC \\ (A + B)C & = & AC + BC \end{array}$$
8. Una matriz A es invertible si
   (a) Tiene n filas y n columnas.
   (b) Existe otra matriz, también $n \times n$, A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Llamamos a A^{-1} la inversa de A.

7. *(*) Siendo*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

calcular, si es que está definida, la cantidad indicada:

i) $3A$

ii) $0B$

iii) $A+B$

iv) $B+C$

v) $C-D$

vi) $3A+4D$

vii) $2D-3C$

viii) $(AC)^2$

ix) $(A^T)A$

x) $A(A^T)$

xi) $C(D)^T$

xii) $(A-2B)(3C-D)$

xiii) $(CD)^T$

xiv) $(C^T)D$

8. *(*) Hallar una matriz C, 4×4, tal que para toda matriz A, $4\times n$, el producto CA de como resultado la matriz A pero en la que a cada fila se le ha sumado 3 veces la suma de la primera y la cuarta.*

Ayuda:
Recuérdese que

1. Las matrices elementales se obtienen aplicando la operación elemental correspondiente a la matriz identidad.
2. Cuando multiplicamos, por la izquierda, una matriz A por una matriz elemental E, EA es también la matriz que se obtiene al efectuar la operación elemental, por filas, en A.

9. *(*) Hállese (usando Gauss-Jordan) la inversa de la siguiente matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:
Formamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

que tiene como reducida de Gauss-Jordan la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/5 & -3/5 & 7/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{10} & -1/5 & 4/5 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & 1/5 & 1/5 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

y la inversa es la matriz formada por las cuatro últimas columnas.

10. *Considérese la matriz* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y sea $h = ad - bc$.

a) Demuéstrese que si $h \neq 0$, *entonces*

$$\begin{pmatrix} d/h & -b/h \\ -c/h & a/h \end{pmatrix}$$

es la inversa de la matriz A.

b) Comprobar que A *es invertible si y sólo si* $h \neq 0$.

11. *(*) Determinar los valores de* c *tales que la matriz siguiente no tiene inversa:*

$$A_c := \begin{pmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{pmatrix}$$

Ayuda:
Podemos usar el algoritmo de Gauss-Jordan sobre la matriz A_c. Sabemos que los valores de c tales que el algoritmo llega a la matriz identidad I_3 son los únicos tal que la matriz A_c es invertible.

En este caso, la matriz no es invertible para $c = 0, 2, 7$.

Veremos más adelante otros métodos para plantear este ejercicio.

12. *Sea* G *el conjunto de las matrices* 4×4 *que consisten de ceros y unos con exactamente un* 1 *en cada fila y columna. Por ejemplo,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar

a) G *contiene* $24 = 4!$ *matrices,*

b) G *con la operación de multiplicación de matrices es un grupo,*

c) G *es isomorfo al grupo de permutaciones de* 4 *elementos,* S_4.

13. *(*) Hallar números* a *y* b *para que*

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

Ayuda:
Podríamos intentar calcular, usando Gauss-Jordan, la matriz inversa que aparece a la izquierda de la igualdad, pero nos están dando la forma que tiene la matriz inversa y es tonto no usar esa información. ¿Cómo?

3.1 Matrices $n \times n$

14. *Sea M una matriz $2n \times 2n$ con bloques $n \times n$: A, B, C y D:*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

Describir M^T en términos de A, B, C y D.

15. *Comprobar que si A es una matriz cuadrada, $(A^4)^T = (A^T)^4$*

16. *(*) Comprobar que si A es una matriz cuadrada invertible, entonces A^T es invertible, y de hecho:*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

17. *(*) Una matriz es* **simétrica** *si y sólo si es igual a su transpuesta. Sean A y B matrices simétricas $n \times n$. ¿Cuáles de las matrices siguientes son simétricas?*

a) $A^2 - B^2$

b) $(A+B)(A-B)$

c) ABA

d) $ABAB$

Solución:
Por ejemplo, consideremos el apartado b). Calculamos

$$\begin{aligned} &((A+B)(A-B))^T = \\ &\qquad = (A-B)^T(A+B)^T = (A^T - B^T)(A^T + B^T) = \\ &\qquad\qquad = (A-B)(A+B) \stackrel{?}{=} (A+B)(A-B). \end{aligned}$$

La última igualdad, con la interrogación, no siempre es cierta porque el producto de matrices no es siempre conmutativo, y multiplicando los paréntesis podemos ver que vale si y sólo si $AB = BA$.

18. *(*) Una matriz cuadrada A, $n \times n$ se dice* **nilpotente** *si $A^r = 0_n$, para algún número natural r.*

a) Demostrar que si A es una matriz invertible, $n \times n$, entonces A no es nilpotente.

b) Dar un ejemplo de una matriz A, $n \times n$ con $n \geq 2$, tal que $A^n = 0$, y, por tanto, A es nilpotente, pero tal que $A^{n-1} \neq 0$.

c) Sea $A \neq 0$ una matriz nilpotente con $A^2 = 0$ y **entradas números reales**. *Comprobar que $AA^T \neq 0$.*

Ayuda:

a) Una matriz nilpotente e invertible sería necesariamente nula, y, por tanto, no invertible. ¿por qué?

b) Supongamos, para empezar, $n = 2$. Una matriz nilpotente, al ser una potencia suya nula, debería tener bastantes ceros. ¿Dónde estarán situados esos ceros?

Para decidir esto, multiplicamos una matriz 2×2, con entradas variables

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

por sí misma e igualamos a la matriz nula. Obtenemos un sistema de ecuaciones, no lineal, con cuatro incógnitas. Resolviéndolo podemos determinar todas las matrices nilpotentes 2×2.

Obsérvese que no hay que hallar todas las soluciones del sistema. Basta encontrar una solución que corresponda a una matriz distinta de la nula. Sin embargo, en este caso no es difícil resolver completamente el sistema, y por tanto, determinar todas las matrices 2×2 nilpotentes.

Trata ahora de contestar directamente, sin plantear un sistema de ecuaciones, a la pregunta ¿Cómo serán las matrices nilpotentes 3×3?

c) Examinar cómo serían las entradas de la matriz AA^T. ¿Cómo usaremos la hipótesis de que las entradas de A son números reales?

19. *(*) Hállese una matriz A, $n \times n$ con $n \geq 2$, que no sea la identidad I_n, pero tal que*

$$A^2 = I_n$$

Ayuda:
Supongamos, para empezar, que $n = 2$. Multiplicamos una matriz 2×2, A, con entradas variables

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

por sí misma e igualamos a la matriz I_n. Obtenemos un sistema de ecuaciones, no lineal, que hay que resolver. El sistema es bastante similar, aunque un poco más complicado, al del problema anterior.

Obsérvese que no hay que hallar todas las soluciones del sistema. Basta encontrar una solución que corresponda a una matriz distinta de la identidad.

20. *En general, el producto de matrices no es conmutativo, pero ¿es conmutativo el producto de matrices elementales?*

4 Subespacios vectoriales

4.0.1 Algunos resultados

1. Dos bases de un espacio vectorial, de dimensión finita, tienen el mismo número de elementos.
2. Todo subespacio vectorial de k^n es finitamente generado, y, en consecuencia, solución de un sistema homogéneo de ecuaciones.
3. Todo espacio vectorial finitamente generado tiene bases. Todo conjunto libre de vectores forma parte de una base.

4. (Grassmann) Si $E_1,\ E_2 \subset E$ son subespacios, con E finitamente generado, se verifica

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

5. (Frobenius) El número mínimo de ecuaciones en un sistema cuya solución es un subespacio de k^n, de dimensión ℓ, es $n - \ell$.
6. Todo subespacio $E_1 \subset E$, con E finitamente generado, tiene un complemento F tal que $E = E_1 \oplus F$.

4.1 Espacios vectoriales y subespacios

21. *(*) En los ejemplos que siguen, decidir si el conjunto dado, junto con las operaciones indicadas de suma y multiplicación por un escalar, es o no un espacio vectorial.*

i) *El conjunto $\mathbb{Q}^2$ con la suma usual, pero con la multiplicación por un escalar definida por*

$$r(x, y) = (ry, rx).$$

ii) *El conjunto $\mathbb{Q}^2$ con la multiplicación escalar usual, pero con la suma definida por*

$$(x, y) + (r, s) = (y + s, x + r)$$

.

iii) *El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar.*

iv) *El conjunto de todas las funciones que transforman $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la multiplicación por un escalar usual pero con la operación de suma dada por*

$$(f + g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

Solución:

IV) Es difícil que esta suma tenga las propiedades exigidas. Por ejemplo, para que exista un elemento neutro para la suma debería existir una función tal que el máximo de ella y cualquier función $f(x)$ fuera, para todo x, igual a $f(x)$. Tal función no existe. ¿Por qué?

22. *(*) En los ejemplos que siguen, determinar si el subconjunto indicado es o no un subespacio del espacio vectorial dado.*

i) $\{(r, -r) : r \in \mathbb{Q}\}$, *en* $\mathbb{Q}^2$.

ii) $\{(r, r + 1) : r \in \mathbb{Q}\}$, *en* $\mathbb{Q}^2$.

iii) $\{(a, b) : a,\ y\ b$ *son enteros* $\}$, *en* $\mathbb{Q}^2$.

iv) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x \geq 0, y \geq 0\}$, *en* $\mathbb{Q}^2$.

v) $\{(x, y, z) : x, y \in \mathbb{Q}$ *y* $z = 3x+2\}$, *en* $\mathbb{Q}^3$.

vi) *Las sucesiones convergentes de números reales en el espacio de las sucesiones de números reales.*

vii) *Las matrices racionales $n \times n$ que son antisimétricas, es decir, tales que $A = -A^T$.*

viii) *Los polinomios de grado <u>exactamente</u> 7 en el espacio $\mathbb{Q}[x]$.*

ix) *El conjunto de todas las funciones f tales que $f(1) = 0$, en el espacio vectorial de todas las funciones que transforman $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$.*

x) *El conjunto de todas las funciones f tales que $f(0) = 1$, en el espacio vectorial de todas las funciones que transforman $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$.*

Solución:

VIII) La diferencia de dos polinomios de grado siete, que empiecen los dos por x^7, es de grado a lo más seis.

X) La suma de dos funciones verificando $f(0) = 1$ tiene valor en 0 igual a ...

¿Por qué es distinto este caso del anterior?

4.2 Sistemas generadores, independencia lineal y bases

23. *Determinar si los vectores* $(1, 2, 1), (2, 1, 3), (3, 3, 4)$ *y* $(-1, 2, 0)$ *generan* $\mathbb{Q}^3$.

24. *Expresar, si es posible, el vector b como combinación lineal de los otros vectores v_i en el espacio $\mathbb{Q}^3$*

i) $b = (1,3,1)$, $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$ $v_3 = (3,1,0)$.

ii) $b = (1,2,3)$, $v_1 = (2,2,2)$, $v_2 = (1,0,1)$.

25. *(*) Sea E un espacio vectorial y sean v_1 y v_2 vectores de E. Demostrar que*

i) $< v_1, v_2 >=< v_1, 2v_1 + v_2 >$.

ii) $< v_1, v_2 >=< v_1 + v_2, v_1 - v_2 >$.

26. *(*) Hallar un conjunto de vectores, lo más pequeño posible, que genere el espacio solución del sistema:*

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = & 0 \\ x_1- & 6x_2+ & x_3+ & & = & 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN:
Nos están pidiendo un sistema generador minimal, es decir, una base, de la solución del sistema lineal.

1. Hay que resolver el sistema, por ejemplo, mediante reducción gaussiana, hasta obtener una parametrización de la solución.
2. Obtenemos vectores del subespacio solución dando valores a los parámetros. Podemos obtener así todos los vectores del subespacio solución.
3. Para obtener una base del subespacio solución basta darles **valores adecuados** a los parámetros , es decir, de todas las maneras en que es posible, valor uno a un parámetro y cero a los restantes.
4. Concretamente, en este caso, la parametrización resulta ser

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -(7/13)x_3 - (6/13)x_4 \\ x_2 & = & (1/13)x_3 - (1/13)x_4 \end{array}$$

   y una base del subespacio solución del sistema está formada por los vectores

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & (-(7/13),(1/13),1,0) \\ v_2 & = & (-(6/13),-(1/13),0,1). \end{array}$$

5. Comprobar que los vectores, v_1 y v_2, pertenecen al subespacio solución del sistema, y que realmente forman una base de él.

27. *(*) Decidir si el conjunto de vectores dado es dependiente o independiente. Si es dependiente, hallar un conjunto independiente que genere el mismo subespacio que el conjunto dado.*

i) $\{(2,1),(-6,-3),(1,4)\}$ *en* $\mathbb{Q}^2$.

ii) $\{(1,-3,2),(2,-5,3),(4,0,1)\}$ *en* $\mathbb{Q}^3$.

iii) $\{x^2-1, x^2+1, 4x, 2x-3\}$ *en* $\mathbb{Q}[x]$.

SOLUCIÓN:
III)

1. Planteamos el sistema

$$\alpha \cdot (x^2-1) + \beta \cdot (x^2+1) + \gamma \cdot (4x) + \tau \cdot (2x-3) = 0$$

   con incógnitas $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ y el cero a la derecha de la igualdad representando el polinomio nulo.
2. Agrupando términos, obtenemos

$$(\alpha+\beta)x^2 + (4\gamma+2\tau)x + (-\alpha+\beta-3\tau) = 0.$$

3. Dos polinomios iguales deben tener todos sus coeficientes iguales, de forma que obtenemos el sistema lineal

$$\begin{array}{rcl} \alpha+\beta & = & 0 \\ 4\gamma+2\tau & = & 0 \\ -\alpha+\beta-3\tau & = & 0 \end{array}$$

4. La solución, parametrizada, del sistema es

$$\alpha = -(3/2)\tau,\ \beta = (3/2)\tau,\ \gamma = -(1/2)\tau.$$

5. ¿Son independientes los cuatro vectores?
NO
¿Cómo encontrar un subconjunto maximal de vectores independientes?

28. *Determinar si el conjunto de vectores dado es o no una base para el espacio* $\mathbb{Q}^n$ *indicado*

i) $\{(-1,1),(1,2)\}$ *en* $\mathbb{Q}^2$.

ii) $\{(-1,3,4),(1,5,-1),(1,13,2)\}$ *en* $\mathbb{Q}^3$.

iii) $\{(2,1,0,2),(2,-3,1,0),(3,2,0,0),(5,0,0,0)\}$ *en* $\mathbb{Q}^4$.

29. *Hallar una base para el subespacio de* $\mathcal{P}_3$ *(los polinomios de grado menor o igual que 3) que consiste de aquellos polinomios* p *con* $p(1) = 0$.

30. *(*) Hallar una base para el subespacio de* $\mathbb{Q}^n$ *indicado y extender hasta una base de todo* $\mathbb{Q}^n$.

i) El subespacio

$$\{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

de $\mathbb{Q}^3$.

ii) El subespacio

$$< (1,2,0),(2,1,1),(0,-3,1),(3,0,2) >$$

de $\mathbb{Q}^3$.

iii) El espacio nulo de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iv) El subespacio

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 + x_2 = 0, x_2 = x_4, x_5 = x_1 + 3x_3\}$$

de $\mathbb{Q}^5$.

SOLUCIÓN:
IV)

1. Primero debemos resolver el sistema. Una parametrización de la solución, obtenida, por ejemplo, mediante Gauss-Jordan, es

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_4 \\ x_2 &= x_4 \\ x_3 &= (1/3)x_4 + (1/3)x_5. \end{aligned}$$

2. Ahora damos valores adecuados a las variables libres, x_4 y x_5, y obtenemos

$$\begin{aligned} v_1 &= (-1,1,1/3,1,0) \\ v_2 &= (0,0,1/3,0,1). \end{aligned}$$

3. Finalmente, debemos extender $\{v_1, v_2\}$ a una base de $\mathbb{Q}^5$. Consideramos el conjunto de siete vectores $\mathcal{T} := \{v_1, v_2, e_1, \ldots, e_5\}$, con los e_i los vectores de la base estandar de $\mathbb{Q}^5$. **Debemos encontrar un subconjunto de $\mathcal{T}$ que sea base y contenga a v_1 y v_2.** ¿Cómo se hace ésto?

4. Una de las bases que verifican lo que queremos es $\{v_1, v_2, e_1, e_2, e_3\}$. Encontrar otra.

31. *(*) Hallar el número máximo de vectores independientes de entre los siguientes* 6 *vectores de* $\mathbb{Q}^4$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

AYUDA:
Nos están pidiendo la dimensión del subespacio generado por los seis vectores, que se puede calcular como el número de pivotes en la reducción del sistema que tiene como matriz la que se forma con los seis vectores como columnas.

En este caso, la dimensión es tres.

32. *Supóngase que S es un subespacio de $\mathbb{Q}^6$ de dimensión 5. Decidir si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:*

i) Toda base de S se puede extender a una base de $\mathbb{Q}^6$ añadiéndole un vector.

ii) Toda base de $\mathbb{Q}^6$ se puede reducir a una base de S eliminando un vector.

33. *Hallar una base para el plano $\Pi : x - 2y + 3z = 0$ en $\mathbb{Q}^3$. Y, después, hallar una base para la intersección de este plano con el plano $z = 0$.*

4.3 Ecuaciones de un subespacio

34. *(*) Hallar una ecuación para el hiperplano en $\mathbb{Q}^4$ generado por los vectores*

$$\begin{aligned} u &:= (1, -1, 1, 0) \\ v &:= (1, 1, 0, 1) \\ w &:= (2, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

35. *(*) Determinar un sistema lineal homogéneo de ecuaciones tal que su solución sea, exactamente, el subespacio de $\mathbb{Q}^4$ generado por los vectores $v_1 := (1, 2, 3, 4)$ y $v_2 := (2, 3, 4, 5)$.*

SOLUCIÓN:

1. Los dos vectores, v_1 y v_2, son linealmente independientes, como podemos comprobar mediante reducción gaussiana de la matriz que los tiene por filas. Llamemos E_1 al subespacio, de dimensión 2, que generan.
2. Consideramos una forma lineal con coeficientes, A_i, indeterminados

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4$$

   e imponemos que se anula sobre v_1 y v_2, obteniendo dos ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4 &= 0 \\ 2A_1 + 3A_2 + 4A_3 + 5A_4 &= 0 \end{aligned}$$

   La solución del sistema es el conjunto de 4-uplas que son coeficientes de formas lineales que se anulan en v_1 y v_2.
3. Reduciendo este sistema, obtenemos la parametrización

$$\begin{aligned} A_1 &= A_3 + 2A_4 \\ A_2 &= -2A_3 - 3A_4 \end{aligned}$$

   y, dando valores adecuados a las variables, una base de E_1^0:

$$\{(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}.$$

4. De acuerdo con el teorema de Frobenius, estos dos vectores son los coeficientes de las dos ecuaciones de un sistema cuya solución es E_1.

   Escribimos el sistema:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

5. **Queremos ahora comprobar que la afirmación del punto anterior es cierta.** Empezamos resolviendo el sistema (10), lo que nos da la parametrización:
$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 &= 2x_3 - x_4 \end{aligned}$$
   Dando valores adecuados a las variables libres, obtenemos una base del subespacio solución, al que llamamos E_2:
$$\{w_1 := (3,2,1,0), w_2 := (-2,-1,0,1)\}.$$

6. Nuestro problema se reduce ahora a demostrar que se verifica $E_1 = E_2$.

   Como conocemos un sistema de ecuaciones, (10), para E_2, podemos comprobar que $E_1 \subset E_2$, sin más que sustituir las coordenadas de v_1 y v_2 en las dos ecuaciones de (10), y ver que resulta cero en los cuatro casos.

7. Concluimos que $E_1 = E_2$, porque sabemos que ambos subespacios tienen dimensión 2.

8. **Otro método:** También podríamos comprobar el contenido $E_1 \supset E_2$, escribiendo los vectores $w_i,\ i = 1, 2$, como combinación lineal de los v_i.

   Para esto, planteamos un sistema
$$w_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$$
   con dos incógnitas y cuatro ecuaciones, que si tiene solución nos dice que w_1 pertenece a E_1. Hay que hacer lo mismo con w_2.

9. **Otro más:** Lo expongo en general.

   Queremos ver si se verifica
$$< v_1, \ldots, v_n >=< w_1, \ldots, w_m > .$$
   (a) Formamos la matriz A_1 con columnas los vectores v_i y, después los w_j. Es la matriz del sistema
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m = 0.$$
   (b) Efectuamos la reducción gaussiana de A_1.

   (c) Si todas las variables β_j son libres, podremos despejar, dando a todas valor cero menos a una, j_0, y a esa le damos valor -1, w_{j_0} como combinación de los v_i. Obtendríamos así el contenido
$$< v_1, \ldots, v_n >\supset< w_1, \ldots, w_m > .$$
   (d) Repetimos el proceso, pero colocando los vectores w_j como las primeras columnas de la matriz, a la que llamamos A_2.

   En nuestro caso la matriz A_1 tiene reducción de Gauss-Jordan
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   que nos da
$$\begin{aligned} w_1 &= -5v_1 + 4v_2 \\ w_2 &= 4v_1 - 3v_2 \end{aligned}$$
   y A_2 reduce a
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   que nos da las combinaciones lineales
$$\begin{aligned} v_1 &= 3w_1 + 4w_2 \\ v_2 &= 4w_1 + 5w_2 \end{aligned}$$

4.4 Intersección y suma de subespacios

36. *(*) Consideremos los tres vectores* $v_1 = (1, 3, 4), v_2 = (2, 7, 2), v_3 = (-1, 2, 1)$.

i) Determinar si $(-3, 1, -2) \in < v_1, v_2, v_3 >$.

ii) Determinar si $\mathbb{Q}^3 =< v_1, v_2, v_3 >$.

AYUDA:

i) Planteamos el sistema

$$(-3, 1, -2) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3$$

que es un sistema lineal no homogéneo con incógnitas x, y, z; si tiene solución el vector pertenece al subespacio, y si no la tiene no pertenece.

ii) Planteamos el sistema

$$(a, b, c) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3$$

que debemos ver, no como un sistema con seis incógnitas, sino como un sistema lineal no homogéneo con **incógnitas**, es decir, cantidades a determinar, x, y, z y **parámetros**, es decir, cantidades que suponemos dadas aunque no les hemos asignado un valor concreto, a, b, c.

¿Cómo debe ser la reducción gaussiana de la matriz del sistema para que tenga solución para todo valor de los parámetros?

37. *(*) Hallar una base para el espacio* S *de los vectores* (a, b, c, d) *con* $a + c + d = 0$ *y también para el espacio* T *con* $a + b = 0$ *y* $c = 2d$*, ¿Cuál es la dimensión de la intersección* $S \cap T$*?*

SOLUCIÓN:

1. ¿Cómo encontramos una parametrización de S? Despejando.
   Los parámetros son b, c y d, y la parametrización es $a = -c - d$. El conjunto de soluciones está formado por todos los vectores de la forma $(-c - d, b, c, d)$.
   Una base, obtenida dando valores adecuados a los parámetros, es
   $$\{(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}.$$
2. Para T seguimos el mismo camino. Las dos ecuaciones no tienen variables comunes, y, entonces, el sistema ya está resuelto. Se obtiene la parametrización
   $$\begin{aligned} a &= -b \\ c &= 2d \end{aligned}$$
   con parámetros b y d. Dándoles valores adecuados se obtiene la base
   $$\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}.$$
3. La interseción, $S \cap T$, es la solución del sistema formado por las tres ecuaciones.
   Calculando la reducción de Gauss-Jordan del sistema llegamos a la parametrización
   $$\begin{aligned} a &= -3d \\ b &= 3d \\ c &= 2d \end{aligned}$$
   La dimensión de $S \cap T$ es uno.

38. *(*) Si* S *es el subespacio de* $\mathbf{Q}^4$ *generado por* $v_1 := (1, -1, 1, 0)$ *y* $v_2 := (2, 1, 1, 2)$*, y* T *el de los vectores que satisfacen* $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$*,* $2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ *hallar una base de* $S + T$ *y una base de* $S \cap T$*.*

SOLUCIÓN:

1. Comenzamos con $S \cap T$. Los vectores de S son, para valores arbitrarios de los parámetros α y β, de la forma

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta, \alpha + \beta, 3\beta).$$

2. Los que están en $S \cap T$ son los que, además, verifican las ecuaciones de T, lo que, después de sustituir en ellas y agrupar términos, resulta en:

$$\begin{array}{rcl} \alpha - \beta & = & 0 \\ -3\alpha + 4\beta & = & 0 \end{array}$$

que tiene como única solución $\alpha = \beta = 0$. Entonces, $S \cap T = 0$ y no tiene bases.

3. Una base de T se obtiene de resolver el sistema, que ya está en forma reducida. Llegamos a la parametrización

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -(3/2)x_3 + (3/2)x_4 \\ x_2 & = & (1/2)x_3 - (1/2)x_4 \end{array}$$

y, por tanto, a una base de la forma

$$\{v_3 := (-(3/2), 1/2, 1, 0), v_4 := (3/2, -(1/2), 0, 1)\}.$$

4. En este caso los cuatro vectores v_i son linealmente independientes (**compruébalo**), y por tanto base de $S + T$. Como la dimensión del espacio ambiente es también cuatro, sabemos que debe ser $S + T = \mathbb{Q}^4$.

5. **De otra forma:** usando que $S \cap T = 0$ implica, por la fórmula de Grassmann, $\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T)$, y en este caso $\dim(S+T) = 2+2 = 4$, vemos más directamente que $S + T = \mathbb{Q}^4$,y, por tanto, que una base de $S + T$ es la base estandar de $\mathbb{Q}^4$.

39. *Estudiar la suma y la intersección, en función del valor del parámetro a, de los subespacios*

$$E_1 :=< v_1 := (3,2,1,0), v_2 := (-2,-1,0,1), v_3(a) := (1,1,a,1) >$$
$$E_2 :=< w_1 := (1,0,0,0), w_2 := (1,2,3,4), w_3 := (2,3,4,5) > .$$

Solución:
La reducción gaussiana del sistema con matriz, A, la que tiene como columnas los seis vectores, primero los generadores de E_1 y luego los de E_2, es

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & a-1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Si $a \neq 1$, las cuatro primeras variables son pivotes, luego las cuatro primeras columnas de A son base de $\mathbb{Q}^4 = E_1 + E_2$.

   ¿Qué podemos decir de la intersección?

   Las variables β_2 y β_3 son libres, de forma que, como β_1 es cero para todas las soluciones, los vectores w_2 y w_3 generan la intersección, que es 2-dimensional.

2. Si $a = 1$, la suma $E_1 + E_2$ tiene como base los vectores v_1, v_2 y w_1, luego es tridimensional.

   El subespacio E_1 tiene dimensión 2, y el E_2 dimensión 3. Tiene que ocurrir entonces, ya que la suma tiene dimensión 3, que $E_1 \subset E_2$, y, por tanto, $E_1 \cap E_2 = E_1$.

40. *Consideramos los subespacios de $\mathbb{Q}^4$ definidos por*

$$\begin{array}{rcl} E_1 & := & < (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,3,1,3) > \\ E_2 & := & < (1,2,0,2), (1,2,1,2), (3,1,3,1) > . \end{array}$$

calcular una base de $E_1 \cap E_2$, y extenderla a bases de E_1 y E_2.

41. *(*) Consideramos los subespacios de $\mathbb{Q}^4$ definidos por*

$$\begin{array}{rcl} E_1 & := & < e_1 := (1,2,3,4), e_2 := (2,2,2,6), e_3 := (0,2,4,4) > \\ E_2 & := & < e_4 := (1,0,-1,2), e_5 := (2,3,0,1) > . \end{array}$$

calcular una base de $E_1 \cap E_2$, y extenderla a bases de E_1 y E_2.

SOLUCIÓN:

1. Empezamos considerando el sistema

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 \tag{11}$$

que tiene como matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyas primeras tres columnas son los generadores de E_1, y las otras dos los de E_2 cambiados de signo.

2. Una reducción gaussiana de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y una parametrización de la solución

$$\lambda_1 = -\lambda_4,\ \lambda_2 = \lambda_4,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_5 = 0. \tag{12}$$

3. ¿Qué información podemos obtener de la solución del sistema?

   (a) **Los vectores e_1, e_2 y e_3 son linealmente independientes**, ya que una relación de dependencia lineal

   $$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$$

   nos da una solución del sistema (11) de la forma

   $$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0, 0)$$

   pero, como $\lambda_4 = 0$, la parametrización (12)nos dice que debe ser $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

   (b) **Los vectores e_3 y e_4 son , también, linealmente independientes**, ya que una relación de dependencia lineal

   $$\lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0$$

   nos da una solución del sistema (11) de la forma

   $$(0, 0, 0, -\lambda_4, -\lambda_5)$$

   pero, como $\lambda_5 = 0$, para toda solución de (11), nos queda $\lambda_4 e_4 = 0$ y, por ser $e_4 \neq 0$, también $\lambda_4 = 0$.

   (c) **La intersección $E_1 \cap E_2$ está generada por e_4:** obtenemos una base de la solución de (11), que tiene dimensión 1, dando valor adecuado a la variable libre λ_4 ($\lambda_4 = 1$). Entonces, la solución básica de (11) corresponde a la relación (que nos da e_4 como combinación lineal de e_1 y e_2),

   $$-e_1 + e_2 - e_4 = 0,$$

   y $E_1 \cap E_2$ tiene, también, dimensión 1 y está generado por e_4. Por supuesto, también podemos afirmar que $E_1 \cap E_2$ está generado por $-e_1 + e_2$.

4. **Falta extender las bases**.

   (a) Obtenemos una base de E_2 que contiene a e_4 sin cálculos: es $\{e_4, e_5\}$.

(b) Para extender $\{e_4 = -e_1 + e_2\}$ a una base de E_1, podemos dejar e_1, debemos quitar e_2 porque queremos que esté $-e_1 + e_2$, y falta uno que podería ser e_3.
¿Es libre el conjunto $\{e_1, -e_1 + e_2, e_3\}$? Si no lo fuera, tendríamos

$$\lambda e_1 + \beta(-e_1 + e_2) + \gamma e_3 = 0$$

que, como e_1, e_2 y e_3 son linealmente independientes, nos da el sistema

$$\lambda - \beta = 0,\ beta = 0,\ \gamma = 0$$

cuya única solución es $\lambda = \beta = \gamma = 0$.

(c) **De otra manera:** consideramos el conjunto de vectores $\{e_4, e_1, e_2, e_3\}$ y tratamos de extraer una base de él **que incluya a** e_4**.**
Formamos el sistema

$$\lambda_4 e_4 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$$

con matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

y reducción gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que e_4, e_1 y e_3 son linealmente independientes, y, por tanto, base de E_1.

42. *Consideramos los subespacios en* $\mathbb{Q}^4$ *definidos en la forma*

1. E_1 *es el subespacio solución del sistema*

$$\begin{aligned} -2x + 3y + z + 4t &= 0 \\ x + y + 2z + 3t &= 0. \end{aligned}$$

2. E_2 *es el subespacio solución de la ecuación* $2x + y + z - 2t = 0$.

Calcular bases (y, por tanto, dimensiones) para E_1,E_2, $E_1 \cap E_2$ *y* $E_1 + E_2$. *Determinar sistemas de ecuaciones cuyos subespacios solución sean* $E_1 \cap E_2$ *y* $E_1 + E_2$.

43. *(*) Consideramos la matriz con coeficientes racionales*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea

$$F := \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}) \mid XA = AX\}.$$

1. *Demostrar que* F *es un subespacio de* $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.
2. *Calcular una base de* F.
3. *Encontrar un suplementario de* F *que contenga a la matriz*

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5 Espacios de funciones

44. *El espacio C_3 es el espacio que contiene todas las combinaciones lineales de las* funciones *$cos(x)$, $cos(2x)$ y $cos(3x)$, es decir, las funciones:*

$$f(x) = A cos(x) + B cos(2x) + C cos(3x)$$

donde A, B y C son números reales cualesquiera. Hallar una base para el subespacio de C_3 formado por las funciones $f \in C_3$ tales $f(0) = 0$.

45. *Supongamos que $y_1(x)$, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ son tres funciones diferentes. El espacio vectorial que generan puede tener dimensión 1, 2, o 3. Dar un ejemplo de y_1, y_2, y_3 para cada posibilidad.*

46. *Sea $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$. Comprobar que:*

i) $< sen^2(x), cos^2(x) >$ *contiene todas las funciones constantes.*

ii) $< sen^2(x), cos^2(x) >$ *contiene a la función $cos(2x)$.*

iii) $< 7, sen(2x) >$ *contiene la función $8cos(4x)$.*

47. *(*) Decidir si el conjunto dado de funciones del espacio vectorial $\mathcal{F}$ es independiente o dependiente.*

i) $\{sen(x), cos(x)\}$.

ii) $\{1, x, x^2\}$.

iii) $\{sen(x), sen(2x), sen(3x)\}$.

iv) $\{sen(x), sen(-x)\}$.

Solución:
III) Supongamos que son linealmente dependientes. Existen, entonces, constantes tales que

$$\alpha \cdot \text{sen}(x) + \beta \cdot \text{sen}(2x) + \gamma \cdot \text{sen}(3x) = 0$$

para todo valor de x. Si damos a x los valores $\pi/6, \pi/3$ y $\pi/2$ obtenemos el sistema

$$\begin{array}{rcl} (1/2)\alpha + (\sqrt{3}/2)\beta + \gamma & = & 0 \\ (\sqrt{3}/2)\alpha + (\sqrt{3}/2)\beta & = & 0 \\ \alpha - \gamma & = & 0 \end{array}$$

que tiene como única solución $\alpha = \beta = \gamma = 0$, y las tres funciones son linealmente independientes.

5 Aplicaciones lineales

Si A es una matriz $m \times n$ con entradas en un cuerpo k ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, o un cuerpo finito $\mathbb{Z}_p$ con p un primo), podemos verla como la matriz de una aplicación lineal, a la que seguimos llamando A,

$$\begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow{A} & k^m \\ e & \mapsto & A \cdot e \end{array}$$

Si no se indica expícitamente un cuerpo, debemos entender que se trata de uno cualquiera; sin embargo, no suele crear ningún problema suponer que, en tal caso, el cuerpo es el de los números racionales $\mathbb{Q}$.

El **subespacio columna** de A es el subespacio de $Col(A) \subset k^m$ generado por las columnas de la matriz. Es el subespacio formado por todas las imágenes, por la aplicación lineal A, de los vectores de k^n, y le llamamos, también, **imagen** de la aplicación lineal A. El **rango** de la matriz A es la dimensión de su subespacio columna.

El **subespacio fila** de A es el subespacio de $Fil(A) \subset k^n$ generado por las filas de la matriz A.

El **subespacio nulo** de A es la solución, contenida en k^n, del sistema lineal homogéneo $A \cdot X = 0$. Se le llama también **núcleo** de la aplicación lineal A.

Dada una matriz A, $m \times n$, nos referimos con la expresión **los cuatro subespacios de** A a los subespacios $Col(A)$, $Fil(A)$, $Nuc(A)$ y $Nuc(A^T)$.

5.0.1 Algunos resultados

1. Si $u : E \to F$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, se verifica
$$\dim(\mathrm{Nuc}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E).$$
2. El rango de una matriz A es igual al rango de A^T. La dimensión de $Col(A)$ es igual a la de $Fil(A)$.

5.1 Subespacios columna, fila y nulo

48. *(*) Construir un matriz 3×3 cuyo espacio columna contenga a los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ pero no a $(1, 1, 1)$.*

Ayuda:
Empezamos con una matriz A que tenga como primera y segunda columnas los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$. La tercera columna será un vector indeterminado (x, y, z). Para terminar, basta imponer que $(1, 1, 1)$ no pertenezca a la imagen de A. ¿Cómo?

49. *Describir el subespacio más pequeño de $M_{2\times2}(\mathbb{Q})$, las matrices 2×2 con coeficientes reales, que contengan a las matrices que se indican:*

i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
III) Como $M_{2\times2}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^4$, podemos ver estas matrices como vectores de $\mathbb{Q}^4$. Entonces, nos piden una descripción del subespacio generado por los vectores $(1, 0, 0, 0)$ y $(1, 0, 0, 1)$, que son vectores linealmente independientes. Se trata del plano generado por los dos vectores.

50. *(*) En este ejercicio se pide dar matrices con las propiedades que se especifican (si es que es posible):*

i) *Construir una matriz cuyo espacio nulo consista de todas las combinaciones lineales de $(2, 2, 1, 0)$ y $(3, 1, 0, 1)$.*

ii) *Construir una matriz cuyo espacio nulo consista de los múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.*

iii) *Construir una matriz cuyo espacio de columnas contenga a $(1, 1, 5)$ y a $(0, 3, 1)$ y cuyo espacio nulo contenga a $(1, 1, 2)$.*

iv) *Construir una matriz cuyo espacio de columnas contenga a $(1, 1, 0)$ y a $(0, 1, 1)$ y cuyo espacio nulo contenga $(1, 0, 1)$ y $(0, 0, 1)$.*

v) *Construir una matriz cuyo espacio de columnas contenga a $(1, 1, 1)$ y cuyo espacio nulo esté generado por $(1, 1, 1, 1)$.*

vi) *Construir una matriz 2×2 cuyo espacio nulo sea igual a su espacio de columnas.*
¿Existen matrices 3×3 cuyos espacio nulo y espacio de columnas coincidan?

Solución:
V) La matriz tiene que tener 3 filas y 4 columnas. Su primera columna puede ser $(1, 1, 1)$, y representemos la matriz buscada por $A' := (1 \mid A)$ con A una matriz 3×3. Queremos que

1. $A' \cdot (1, 1, 1, 1)^T = 0$.
2. Y que $(1, 1, 1, 1)$ sea la única solución, salvo múltiplos, de este sistema.

La segunda condición se satisface si el rango de A es tres, y para que se satisfaga la primera basta que A tenga un único elemento no nulo, que sea igual a -1 para cancelar el 1 que tenemos en la primera columna, en cada fila. Una posible solución, y quizá la más simple, es tomar $A = -I_3$.

VI) Elegimos como generador del espacio nulo el vector $(1,0)$. La primera columna de la matriz debe ser $(0,0)$, lo que asegura que $(1,0)$ pertenece al espacio nulo. La segunda columna debe ser $(1,0)$, para que el espacio de columnas esté generado por el vector $(1,0)$.

Una solución, no la única, sería

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si la dimensión del espacio ambiente es impar, no existen aplicaciones lineales cuyo núcleo coincida con su imagen, ya que tal existencia entraría en contradicción con el teorema del rango.

51. *Determinar el espacio nulo, una base de este espacio y su dimensión de cada una de las siguientes matrices A, B, C*

$$A = [I \quad I] \qquad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = I$$

I es la matriz identidad $n \times n$.

52. *Demostrar por eliminación que (b_1, b_2, b_3) está en el subespacio de columnas de A si*

$$b_3 - 2b_2 + 4b_1 = 0\,,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Qué combinación lineal de las filas de A da como resultado la fila cero?

53. *(*) Construir un sistema de 2 ecuaciones y tres incógnitas, $A\mathbb{X} = b$, que tenga como conjunto de soluciones a*

$$(2,4,0) + \lambda(1,1,1)$$

siendo λ cualquier número real.

Solución:

1. El sistema homogéneo asociado tiene que tener $<(1,1,1)>$ como subespacio solución. Basta que el rango de la matriz sea 2, y que $(1,1,1)$ sea solución. La matriz del sistema será 2×3.
2. Basta que cada fila de la matriz tenga un 1 y un -1, y podemos conseguir que se cumplan las dos condiciones haciendo que la matriz esté ya reducida con dos pivotes:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Finalmente, el vector $(2,4,0)$ debe ser solución del sistema no homogéneo, luego $A \cdot (2,4,0)^T = b$, es decir, $b = (-2,4)$.

54. *El conjunto de soluciones de*

$$A\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

viene dado por

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallar A.

55. *Calcular el rango de A, de AA^T y de A^TA siendo A:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ó \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

56. *(*)Sin usar eliminación, calcular bases y dimensiones de los cuatro subespacios de A (ver página 19), siendo A la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ó \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solución:
Supongamos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $Col(A)$: Una base de $Col(A)$ está formada por las columnas segunda y tercera.
2. $Fil(A)$: Una base de $Fil(A)$ está formada por las filas primera y tercera.
3. $Nuc(A)$: ¿Qué dimensión tiene el núcleo? El rango, por filas o por columnas, de la matriz es 2, luego el núcleo tiene dimensión $4 - 2 = 2$. El vector $(1, 0, 0, 0)$ pertenece al núcleo con seguridad, y necesitamos otro. Como la columna segunda es igual a la cuarta, nos sirve el vector $(0, 1, 0, -1)$.
4. $Nuc(A)^T$: Tenemos

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango de A^T es igual al de A, igual a 2, basta encontrar un vector, no nulo, del núcleo. Sirve el $(0, 1, 0)$, como vemos directamente en la matriz.

57. *Supóngase que la matriz 3×3 A es invertible. Escríbanse bases para los cuatro subespacios de A (página 19), y también para los de la matriz 3×6, $[A \quad A]$*

58. *¿Cuáles son las dimensiones de los cuatro subespacios de A, B, y C (página 19), siendo I la matriz identidad 3×3 y 0 la matriz cero 3×2?*

$$A = [I \quad 0] \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0^T & 0^T \end{bmatrix} \quad C = [0]$$

59. *(*) Construir una matriz que tenga a $\{(1, 0, 1), (1, 2, 0)\}$ como base de su espacio de filas y, también, de su espacio de columnas. ¿Por qué no puede ser una base a la vez para el espacio de filas y para el espacio nulo? En general, explicar por qué un vector $v \neq 0)$ no puede ser una fila de A y estar además en el espacio nulo de A.*

Ayuda:
La matriz buscada debe ser 3×3 y podemos suponer que tiene como primeras columnas los dos vectores dados. Tenemos entonces la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+b \\ 0 & 2 & 2b \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

con la tercera columna una combinación lineal arbitraria de las dos primeras.

Por otra parte,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ a+b & 2b & a \end{pmatrix}$$

y las dos matrices deben tener el mismo subespacio columna. Podemos, por ejemplo, comenzar haciendo $a = 1$, de forma que la tercera columna de A^T coincide con la primera de A. ¿Cómo podemos terminar el ejercicio?

60. *(*) Construir una matriz cuyo espacio de columnas tenga como base a* $\{(1,2,4),(2,2,1)\}$ *y cuyo espacio de filas tenga como base a* $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$.

61. *(*) Describir todas las soluciones de* $A\mathbb{X} = 0$ *siendo* A *el producto*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dar además una base del espacio de columnas de A.

62. *(*) Sin multiplicar las matrices, hallar bases para el espacio de las filas y el espacio de las columnas de* A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de la forma de los factores, ¿cómo se puede deducir que A *no es invertible?*

Ayuda:
El producto de las dos matrices es 3×3, pero la aplicación que actúa primero, con matriz 2×3 tiene imagen de dimensión dos. la segunda matriz no puede aumentar el rango, sólo puede, quizá, mantenerlo. Un candidato a ser una base del subespacio de columnas de A se obtendría multiplicando las dos primeras columnas de la matriz de la derecha, que son independientes, por la matriz de la izquierda. ¿por qué vale esto?

63. *Elegir los números a, b, c, d de la siguiente matriz aumentada:*

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & 5 & b \\ 0 & 0 & d & c \end{array}\right)$$

para que

a) no haya solución,

b) haya infinitas soluciones.

64. *(*) Argumentar si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes:*

i) Sea A *una matriz* $m \times n$. *Si las columnas de* A *son dependientes, entonces las filas de* A *son dependientes.*

ii) El espacio de columnas de una matriz 2×2 *es el mismo que el espacio de filas.*

iii) El espacio de columnas de una matriz 2×2 *tiene la misma dimensión que su espacio de filas.*

iv) Las columnas de una matriz son una base para su espacio de columnas.

65. *(*) Decir si es cierto o falso (dando un contraejemplo en el caso de que sea falso):*

i) Sea A *una matriz* $m \times n$. *Los vectores columna* b, $n \times 1$, *que no están en el subespacio* $Col(A)$ *forman un subespacio.*

ii) Si el espacio $Col(A)$ *sólo contiene al vector cero, entonces la matriz* A *es la matriz cero.*

iii) El espacio columna de $2A$ *coincide con el espacio columna de* A.

iv) El espacio columna de $A - I$ *coincide con el espacio columna de* A.

66. *Sea* A *una matriz* $n \times n$. *Mostrar mediante ejemplos que los siguientes enunciados son, en general,* falsos

i) A *y* A^T *tienen el mismo espacio nulo*

ii) A *y* A^T *tienen las mismas variables libres.*

67. *¿Cierto o falso?*

i) Si $m = n$ entonces el espacio de filas de A es igual a su espacio de columnas.

ii) Las matrices A y $-A$ tienen los mismos cuatro subespacios.

iii) Si A y B comparten los mismos cuatro subespacios entonces A es un múltiplo de B.

68. *(*) Sea E un espacio vectorial de dimensión n. Si u es un endomorfismo de E (i.e. aplicación lineal de E en sí mismo) verificando $u^2 = \mathbb{I}_E$.*

Definimos

$$E_{\pm 1} := \{e \in E \mid u(e) = \pm e\}$$

que son subespacios vectoriales de E

Demostrar que se verifica

$$E = E_1 \oplus E_{-1}.$$

¿Qué ocurre si se suprime la hipótesis sobre la dimensión de E?

69. *(*) Sea E un espacio vectorial. Si u es un endomorfismo de E verificando $u^2 = u$, demostrar que E es la suma directa del núcleo de u con la imagen de u. Se dice, si $u^2 = u$, que u es un* **proyector***.*

Si E es la suma directa del núcleo de u con la imagen de u, demostrar que no necesariamente u es un proyector.

Solución:

1. Demostremos primero que $Nuc(u) \cap Im(u) = 0$. Supongamos que $e \in Nuc(u) \cap Im(u)$, entonces $u(e) = 0$, pero $e = u(e_1)$. Esto implica que $u^2(e_1) = 0$, pero, como u es un proyector, será también $u^2(e_1) = u(e_1) = e$. Hemos visto, entonces, que $e = 0$.
2. Demostremos ahora que $E = Nuc(u) + Im(u)$. Dado un vector cualquiera, $e \in E$, hay que descomponerlo como suma de un vector de imagen nula y otro que sea imagen. Lo más fácil (¿por qué?) es elegir el vector que es imagen como $u(e)$, y tratar de ver que $e - u(e)$ está en el núcleo de u:
$$u(e - u(e)) = u(e) - u^2(e) = u(e) - u(e) = 0.$$
3. Para ver que el recíproco no es cierto, podemos componer un proyector p con un automorfismo de la imagen p, de forma que la composición no sea proyector, pero todavía se verifique la descomposición en suma directa. Implementar esta idea.

70. *(*) Sea E un espacio vectorial. Si u es un endomorfismo de E verificando $u^2 + u + \mathbb{I} = 0$. Demostrar que u es biyectivo y calcular su inverso.*

71. *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y u, v endomorfismos de E. Supuesto que conocemos los rangos de u y v, ¿qué se puede decir de los rangos de $u \circ v$ y de $u + v$?*

Demostrar, de dos maneras distintas, que dos matrices que representan la misma aplicación lineal tienen el mismo rango.

72. *(*) Sea E un espacio vectorial de dimensión 2 y u un endomorfismo de E. Demostrar que el conjunto de endomorfismos de E que conmutan con u es un subespacio vectorial y determinar su dimensión (que dependerá de quién sea u).*

73. *(*) Sea E un espacio vectorial, sobre un cuerpo k, de dimensión $n < \infty$, y $u : E \to E$ un endomorfismo. Demostrar*

1. Que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$Nuc(u^{n_0}) = Nuc(u^{n_0+1}) = Nuc(u^{n_0+2}) = \ldots$$

2. Fijado el n_0 con la propiedad anterior, se verifica

a)
$$u(Nuc(u^{n_0})) \subset Nuc(u^{n_0})$$

b)
$$u(Im(u^{n_0})) \subset Im(u^{n_0})$$

c)

$$E = Nuc(u^{n_0}) \oplus Im(u^{n_0})$$

d) *La restricción de u al subespacio $Im(u^{n_0}) \subset E$ es un automorfismo, es decir, un endomorfismo biyectivo, del subespacio.*

e) *Dado un vector $e \in E$, ¿cuál será, en función de u, la descomposición de e como suma de un vector de $Nuc(u^{n_0})$ con uno de $Im(u^{n_0})$?*

AYUDA:

1. Al ser E de dimensión finita, no puede haber cadenas infinitas de subespacios.
2. La descomposición en suma directa se obtiene probando primero que la intersección de los dos subespacios es el nulo, y despés usando que la suma de dimensiones es igual a la dimensión de E.
3. La restricción de u a $\mathrm{Im}(u^{n_0})$ es inyectiva, y, por ser la dimensión finita, necesariamente suprayectiva.
4. Nos gustaría utilizar $u^{n_0}(e)$ como la componente de e en $\mathrm{Im}(u^{n_0})$, pero la diferencia $e - u^{n_0}(e)$ no necesariamente está en el núcleo de u^{n_0}. ¿Cómo modificar esta elección para que funcione?

74. *(*) Sea E el espacio vectorial, con las operaciones naturales (definirlas), formado por todas las sucesiones $(a_0, a_1, a_2, dots, a_n, dots)$ de números racionales. Definimos $E_1 \subset E$ como el subconjunto de aquellas sucesiones que verifican*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geq 2.$$

Demostrar que E_1 es un subespacio vectorial y calcular su dimensión.

75. *Sea V un espacio vectorial, sobre un cuerpo k, de dimensión finita, y u un endomorfismo de V que verifica $u^2 = 0$.*
Encontrar una base de v tal que la matriz de u sea "lo más simple posible".

76. *Sea V un espacio vectorial, sobre un cuerpo k, de dimensión finita, y u un endomorfismo de V que verifica $u^2 = a \cdot u, \ 0 \neq a \in k$.*
Encontrar una base de v tal que la matriz de u sea "lo más simple posible".

77. *(*) Sea V un espacio vectorial, sobre un cuerpo k, y u un endomorfismo de V que conmuta con todo endomorfismo de V.*
Demostrar que u debe ser una homotecia ($u(e) = \lambda \cdot e, \ \forall e \in V$).

AYUDA:

Usar que si u conmuta con todos los endomorfismos, necesariamente conmuta con los proyectores sobre rectas de V. Estamos usando aquí los proyectores como endomorfismos especialmente sencillos.

78. *Sea T un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita n. Demostrar que $Nuc(T) = Im(T)$ si y sólo si $T^2 = 0$, n es par y $dim(Im(T)) = n/2$.*

79. *Sea $T : E \to E$ un endomorfismo de un espacio vectorial para el que existen escalares α y β tales que $(T - \alpha I) \circ (T - \beta I) = 0$. Demostrar que, entonces, se verifica*

$$E = Nuc(T - \alpha I) \oplus Nuc(T - \beta I).$$

6 Determinantes

1. Se pueden organizar los $n!$ sumandos del determinante de una matriz $n \times n$ en la forma

$$det(A) = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{1+i} a_{1i} A_{1i},$$

con A_{1i} el determinante de la matriz que se obtiene quitando a A la primera fila y la columna i-ésima.

2. El determinante de la matriz transpuesta de A es el mismo que el de A.
3. Se puede calcular un determinante usando, más o menos, las mismas operaciones elementales que usamos para la reducción gaussiana. Hay que tener en cuenta que:
   - Podemos efectuar las operaciones, indistintamente, por filas o por columnas sin que cambie el determinante. Se pueden mezclar las operaciones por filas con las operaciones por columnas.
   - Si intercambiamos dos filas o columnas el signo del determinante cambia.
   - Si multiplicamos una fila o columna por un escalar el determinante se multiplica por el escalar.
   - Si sustituimos una fila o columna por ella más un múltiplo de otra el determinante, gracias a que es multilineal alternado, no cambia.
4. El determinante de una matriz $n \times n$ se anula si y sólo si las n columnas de la matriz son linealmente dependientes. Un conjunto de n vectores de $\mathbb{K}^n$ es base si y sólo si la matriz que tiene estos vectores como columnas tiene determinante no nulo.
5. Una matriz $n \times n$ es invertible si y sólo si su determinante es no nulo.
6. El determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes. El determinante de la matriz inversa es es inverso del determinante de la matriz.

   ¡Cuidado! El determinante de una suma de matrices no es la suma de los determinantes.

80. *(*) Una matriz Q es* ortogonal *si satisface $Q^t = Q^{-1}$. Mostrar que el determinante de una matriz ortogonal sólo puede valer* 1 *o* -1. *Dar un ejemplo de una matriz ortogonal 2×2 con determinante 1, y otro ejemplo con determinante -1.*

Solución

1. El determinante de una matriz cualquiera es igual al determinante de su transpuesta (¿por qué?), pero el determinante de la inversa de una matriz es el inverso del determinante. Entonces
$$det(Q) = det(Q^t) = det(Q^{-1}) = \frac{1}{det(Q)},$$
que hace que sea $det(Q)^2 = 1$, y, por tanto, $det(Q) = \pm 1$.
2. Sirven las matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

81. *(*) Si los coeficientes de cada fila de una matriz A suman cero mostrar que su determinante es nulo. Si suman* 1 *mostrar que* $\det(A - I) = 0$. *¿Será cierto que esta segunda condición implica que* $\det A = 1$*?*

82. *Supongamos que dos matrices cuadradas C y D satisfacen $CD = -DC$. Encontrar la falla en el siguiente razonamiento: si calculamos el determinante de cada uno de los miembros de la igualdad concluimos*
$$\det C \det D = -\det D \det C.$$
Por lo tanto $\det C = 0$ *o* $\det D = 0$, *y una de las dos matrices debe ser singular.*

83. *(*) Llevar, mediante transformaciones elementales, a una matriz triangular superior y calcular los determinantes*
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Solución

1. (Parte 3)

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b).$$

2. (Parte 4)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$$
$$= -abcd.$$

84. *(*) Diremos que una matriz A es* antisimétrica *si satisface $A^t = -A$. Mostrar si n es impar las matrices antisimétricas $n \times n$ tienen determinante nulo, y dar ejemplos explícitos de matrices antisimétricas 2×2 y 4×4 con determinante igual a 1.*

85. *Para las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

y $\lambda \in \mathbf{R}$ calcular A^2, A^{-1}, $A - \lambda I$ y sus determinantes. Hallar los valores λ que anulan $\det(A - \lambda I)$

86. *(*) Sea a_{ij} el elemento que está en la fila i y la columna j de una matriz $n \times n$ a la que llamaremos A. Probar que*

1. *si $n \geq 2$ y $a_{ij} = ij$ entonces $\det(A) = 0$;*
2. *si $n \geq 3$ y $a_{ij} = i + j$ entonces $\det(A) = 0$.*

Ayuda

1. El primer apartado es fácil: el determinante es nulo porque la segunda columna de la matriz es un múltiplo de la primera.
2. El segundo apartado es más interesante. Obsérvese que para $n = 2$ es falso que el determinante sea cero. Resolver primero el caso $n = 3$, y tratar de hacer lo mismo en el caso general.

87. *Decidir si las afirmaciones que aparecen a continuación son verdaderas o falsas. Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.*

1. *Si A no es invertible entonces AB no es invertible;*
2. *$\det(A - B) = \det A - \det B$;*
3. *AB y BA tienen el mismo determinante.*

88. *Calcular los determinantes de A y B calculando los productos que provienen de hacer todas las permutaciones de los índices $\{1,2,3\}$ y $\{1,2,3,4\}$. ¿Son linealmente independientes sus columnas?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

89. *(*) Demostrar de dos formas diferentes que el determinante de la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

es nulo:

1. *mostrando que las filas de A son linealmente dependientes;*
2. *mostrando que cada uno de los sumandos que aparece en la expresión como una suma de $120 = 5!$ productos de los coeficientes de la matriz para el determinante es nulo.*

90. *(*)*

1. *Colocar el menor número posible de ceros en una matriz 4×4 que asegure que su determinante es nulo, independientemente del valor de los restantes coeficientes de la matriz.*
2. *Colocar el mayor número posible de ceros en una matriz 4×4 que permita hacer una elección de los restantes coeficientes de modo tal que el determinante de la matriz sea no nulo.*

Solución

Discuto el caso general de matrices $n \times n$. Llamo $N_1(n)$ al menor número de ceros en una matriz $n \times n$ que asegure que su determinante es nulo independientemente del valor de los restantes coeficientes de la matriz , y $N_2(n)$ al mayor número de ceros en una matriz $n \times n$ que permita hacer una elección de los restantes coeficientes de modo tal que el determinante de la matriz sea no nulo.

1. Para $n = 2$ la solución es fácil. Con una matriz del tipo

   $$\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

   vemos que $N_1(2) \leq 2$. Pero con un único cero es imposible asegurar que el determinante es nulo. Entonces $N_1(2) = 2$.

   Por otra parte, con una matriz del tipo

   $$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

   vemos que $N_2(2) = 2$ también.
2. Puede ser interesante considerar el caso $n = 3$ antes de abordar el caso general, pero aún así paso directamente al caso general.

3. **Cálculo de** $N_1(n)$

   Como en el caso $n = 2$, es claro que $N_1(n) \leq n$ ya que podemos colocar los n ceros en la misma columna y el determinante es necesariamente cero.

   ¿Se puede conseguir lo mismo con $n-1$, o menos, ceros? Basta considerar el caso de $n-1$ ceros exactamente.

   Siempre habrá al menos una fila y una columna sin ceros. Cada uno de los ceros mata $(n-1)!$ sumandos en el determinante, que vemos como una suma de $n!$ sumandos, luego los $n-1$ ceros pueden matar, como máximo, $(n-1)(n-1)! < n!$ y hay sumandos que no tienen ningún cero. Basta elegir bien las $n^2 - n - 1$ entradas no nulas de la matriz para que la suma de todos estos sumandos no nulos sea no nula.

   Entonces, tenemos que $N_1(n) = n$.

4. **Cálculo de** $N_2(n)$

   Si colocamos las entradas no nulas en la diagonal, vemos que podemos poner $n^2 - n$ ceros sin que la matriz sea necesariamente nula, luego $N_2(n) \geq n^2 - n$.

   Si ponemos un cero más, es decir al menos $n^2 - n + 1 =$ ceros. El promedio de ceros en cada columna será $\frac{n^2-n+1}{n} = n - 1 + \frac{1}{n}$, y en una columna debe haber n ceros porque en caso contrario el promedio sería $\leq n-1$.

91. *(*) Llamaremos F_n al determinante de la matriz tridiagonal* [1] *la que tiene unos en la diagonal principal e inmediatamente debajo de ella, -1 sobre la diagonal principal. Los primeros números F_n son*

$$F_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad F_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad F_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollar los determinantes para mostrar la relación de recurrencia $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Estos números son los números de Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$

Ayuda

Calculamos F_4 desarrollando por la primera fila:

$$F_4 = F_3 + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = F_3 + F_2.$$

92. *(*) Consideremos los determinantes C_n de matrices $n \times n$ que tienen todas sus entradas 0 salvo las que están situadas inmediatamente por encima o por debajo de la diagonal principal, que valen 1. Los cuatro primeros números C_n son*

$$C_1 = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad C_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Calcular estos cuatro determinantes y tratar de comprobar el mismo comportamiento en el caso general.

Ayuda

1. Los primeros valores resultan $C_1 = C_3 = 0$ y $C_2 = -1$, $C_4 = 1$.
2. Esto se parece a lo que ocurre en el caso del determinante de las matrices antisimétricas (Ejercicio **5**). Se trataría de ver que es posible, multiplicando las filas o columnas de una de estas matrices por ± 1, transformarla en una matriz antisimétrica.

[1] Ceros fuera de la diagonal principal e inmediatamente por encima y por debajo de ella.

93. *En este ejercicio* A, B, C *y* D *representan matrices* 2×2 *que se usan como bloques para construir matrices* 4×4. *Con* 0 *indicamos la matriz* 2×2 *que tiene ceros en todas sus entradas. Mostrar que*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A||D|,$$

y mostrar también que en general es falso

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D| - |C||B|.$$

Ya que estamos, mostrar que también es falso que el determinante de la matriz 4×4 *pueda calcularse por medio de la expresión* $det(AD - BC)$.

94. *Utilizar la regla de Cramer para resolver los sistemas de ecuaciones lineales*

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1, \\ x_1 & + & 4x_2 & = & -2, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0. \end{array}$$

95. *La regla de Cramer no tiene sentido cuando el determinante de la matriz* A *del sistema se anula. ¿Que ocurre con los cocientes* $\det(B_j)/\det(A)$ *para los dos sistemas que aparecen a continuación? ¿Existen soluciones a estos sistemas?*

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1, \\ 4x_1 & + & 6x_2 & = & 1, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1, \\ 4x_1 & + & 6x_2 & = & 2. \end{array}$$

7 Diagonalización

1. Sea A una matriz $n\times n$ con coeficientes racionales. El polinomio $p_A(\lambda) := det(A-\lambda\mathbf{I})$ se llama **polinomio característico** y sus raíces son los **valores propios o autovalores** de la matriz A.
2. Los coeficientes del polinomio característico son números racionales, pero para calcular sus raíces podemos empezar quitando los denominadores multiplicando por un entero adecuado. Podemos entonces suponer, para calcular los autovalores, que los coeficientes son números enteros.
3. Calculamos los autovalores racionales probando raíces de la forma $\pm\frac{r}{s}$ con r un divisor del término independiente y s un divisor del coeficiente de λ^n. Si el coeficiente de λ^n en el polinomio característico, después de quitar denominadores, es ± 1, no hay valores propios que no sean enteros.
4. Los autovalores reales o complejos, pero no racionales, sólo se pueden calcular de manera aproximada. Hay diversos métodos para efectuar este cálculo, pero en este curso no se ven. Como último recurso, y para buscar las raíces reales, se puede usar el teorema de Bolzano [2] para ir encontrando intervalos cada vez más pequeños que contengan a cada raíz.
5. Supongamos que el polinomio característico se factoriza completamente en la forma $p_A(\lambda) = \prod(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$. Se llama a n_i la **multiplicidad algebraica** del autovalor λ_i. Definimos el **subespacio propio** de autovalor λ_i como $E_i := Nuc(A - \lambda_i\mathbf{I})$. Los vectores de E_i se llaman **autovectores o vectores propios** de autovalor λ_i. Siempre se verifica $dim(E_i) \leq n_i$.
6. La matriz A es diagonalizable si y sólo si se verifica una de las condiciones equivalentes
   (a) Para cada λ_i se da la igualdad $n_i = dim(E_i)$.

[2] Una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ toma al menos un valor nulo en (a,b).

(b) Se verifica $E = \oplus E_i$.

Toda matriz $n \times n$ con n autovalores distintos dos a dos es diagonalizable.

7. Hay matrices que no se pueden diagonalizar, es decir, tales que en ninguna base tienen una matriz diagonal. Un ejemplo es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

96. *(*)*

1. *Para la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcular los valores y vectores propios de A, A^{-1}, A^2 y $A + I$ (siendo I la matriz identidad 2×2).

2. *A partir de $AX = \lambda X$ mostrar que λ^2 y $\lambda + 1$ son autovalores de A^2 y $A + I$ si λ es un autovalor de A. Si existe la matriz inversa A^{-1} mostrar que tiene a λ^{-1} como valor propio.*

Solución de #2

1. $AX = \lambda X$ implica, multiplicando por A los dos miembros, $A^2 X = A(\lambda X) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$. ¿Los autovectores son los mismos?
2. De la misma forma, $AX = \lambda X$ implica, sumando X a los dos miembros, $(A + \mathbf{I})X = \lambda X + X = (\lambda + 1)X$. ¿Los autovectores son los mismos?
3. Multiplicando los dos miembros de $AX = \lambda X$ po A^{-1} se llega a $X = \lambda A^{-1} X$. ¿Los autovectores son los mismos?

97. *(*) Hallar los valores y vectores propios de las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Explicar por qué la matriz A^{100} es muy parecida a B.

98. *Cualquier matriz que represente una permutación de tres elementos deja invariante el vector $(1, 1, 1)$, por lo tanto tiene 1 como valor propio. Hallar los otros autovalores para las matrices*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

99. *(*) Los autovalores de A y A^t coinciden. Esto es cierto porque $\det(A - \lambda I) = \det(A^t - \lambda I)$. Pero, ¿por qué es cierta esta igualdad?. Mostrar con un ejemplo que los vectores propios de A y A^t no son, en general, los mismos.*

100. *(*) Sea A una matriz 3×3 y u, v y w vectores propios correspondientes a los valores propios 0, 3 y 5 respectivamente.*

1. *Dar una base del espacio nulo de A y de su espacio de columnas.*
2. *Encontrar todas las soluciones de $Ax = v + w$.*

3. Mostrar que $Ax = u$ no tiene solución.

Solución Sabemos que vectores propios de valores propios diferentes, dos a dos, son linealmente independientes. Entonces u, v y w son una base de $\mathbb{Q}^3$.

1. El espacio nulo de A es la recta generada por u, ya que al ser la matriz 3×3 y tener tres autovalores distintos cada uno tiene multiplicidad algebraica 1. Pero siempre se verifica $dim(E_i) \leq n_i$, luego la dimensión del núcleo, subespacio propio de autovalor 0, es uno.

   El espacio de columnas de A, que coincide con la imagen, está generado por v y w, ya que los dos vectores pertenecen a la imagen y son independientes, y, por el teorema del rango, la dimensión de la imagen es 2.

2. $$A(\alpha u + \beta v + \gamma w) = 3\beta v + 5\gamma w = v + w,$$

   de donde
   $$(3\beta - 1)v + (5\gamma - 1)w = 0.$$

   Como v y w son linealmente independientes, obtenemos $\beta = 1/3$ y $\gamma = 1/5$.

3. La imagen está generada por v y w, por el apartado 1, y u genera una recta que que está fuera del subespacio $< v, w >= Im(A)$ porque los tres vectores forman una base.

101. *Factorizar las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

en la forma SDS^{-1}, donde D es una matriz diagonal.

102. *Sea $A = SDS^{-1}$, donde D es diagonal.*

1. *¿Cómo puede factorizarse A^3 en la forma $S\bar{D}S^{-1}$, con $\bar{D}$ también diagonal?*

2. *En caso de que exista la inversa de A, ¿cómo se factoriza en la forma $S\bar{D}S^{-1}$? ¿Cómo puede saberse a partir de D si A es o no es invertible?.*

103. *(*) Hallar la matriz A sabiendo que $(1, 0)$ y $(1, 1)$ son vectores propios de A con valores propios 2 y 5 respectivamente.*

104. *(*)*

1. *Supongamos que A y B son dos matrices $n \times n$ y $x_1, x_2, \ldots x_n$ es una familia linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^n$ tal que cada x_i es simultáneamente un vector propio de A y de B, con el mismo valor propio λ_i para ambas matrices. Mostrar que $A = B$.*

2. *Supongamos que una misma matriz S diagonaliza a dos matrices A y B. Es decir, $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son matrices diagonales. Mostrar que A y B* conmutan *(se satisface $AB = BA$) y que existe una base de $\mathbb{R}^n$ cuyos vectores son al mismo tiempo vectores propios de A y de B.*

Ayuda

Tener en cuenta que las matrices diagonales conmutan, ya que el producto es diagonal y tiene entradas los productos de las correspondientes entradas de las dos matrices diagonales.

También es cierto que dos matrices diagonalizables que conmutan se pueden diagonalizar en la misma base. Demostrar esto para dos matrices $n \times n$ con n autovalores distintos.

105. *Sabiendo que B es una matriz 3×3 que tiene autovalores 0, 1 y 2 hallar su rango, el determinante de B^tB, los autovalores de $(B+I)^{-1}$ y los autovalores de B^tB. Sugerencia para la última parte: considerar el producto interno $\langle B^tBX, X\rangle$.*

106. *Supongamos que a partir de los números $G_0 = 0$ y $G_1 = 1$ se genera una sucesión G_k, $k = 0, 1, \ldots$, mediante la fórmula*

$$G_{k+2} = \frac{G_{k+1} + G_k}{2}, \quad k \geq 0$$

(esto es equivalente a decir que cada número es el promedio de los dos anteriores). Mostrar que los números G_k tienden a $2/3$ cuando $k \to \infty$. Sugerencia: la recurrencia que da lugar a estos números puede escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix},$$

para cierta matriz A que hay que determinar.

107.

1. *Sea $A = SDS^{-1}$ con D diagonal. Completar la frase: A^k tiende a la matriz nula cuando k tiende a $+\infty$ si y sólo si todos los λ_i en la diagonal de D tienen valor absoluto menor que ______ .*

2. *Estudiar el comportamiento de las potencias A^k cuando $k \to \infty$ para*

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

3. *Para la primera matriz de la parte anterior, ¿cuál es el espacio de columnas de la matriz límite?*

108. *Consideremos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de A son 1 y 9, en tanto que los de B son -1 y 9.

1. *Hallar una* raíz cuadrada *de A (es decir, una matriz C tal que $C^2 = A$).*

2. *Mostrar que no existe una matriz real 2×2 que sea una raíz cuadrada de B.*

109. *(*) ¿Cuándo generan el expacio nulo de una matriz A sus vectores propios asociados al valor propio 0? ¿Cuándo generan el espacio de columnas de A los vectores propios asociados a los valores propios distintos de 0?.*

110. *Hallar todas las soluciones de la forma* $X(t) = e^{\lambda t}X(0)$ *para la ecuación diferencial*

$$\dot{X} = AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

Hallar la solución que satisface $X(0) = (4, 0)$.

111. *Una población*[3] *de lobos (l) y conejos (c) evoluciona según las ecuaciones*

$$\dot{c} = 6c - 2l, \quad \dot{l} = 2c + l.$$

Si $c(0) = l(0) = 30$, *calcular las poblaciones luego de transcurrido un tiempo* t. *¿La relación entre el número de conejos y lobos tiende a estabilizarse en algún valor?*

112. *Se abre una puerta entre dos habitaciones en las que hay* $\nu(0) = 30$ *personas y* $\mu(0) = 10$ *personas respectivamente. El movimiento entre ambas habitaciones es proporcional a las diferencias* $\nu - \mu$, *de modo que*

$$\dot{\nu} = \mu - \nu, \quad \dot{\mu} = \nu - \mu.$$

Mostrar que el número total de personas $\nu + \mu$ *se mantiene constante. Calcular* ν *y* μ *para* $t = 1$.

113. *Hallar los autovalores de la matriz de Markov*

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.15 \\ 0.1 & 0.85 \end{pmatrix}$$

(conviene recordar que su traza es la suma de los autovalores). ¿Cuál es su estado estacionario?

114. *Hallar autovalores y estados estacionarios para*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

115. *Cada año el 2% de las personas jóvenes se convierten en mayores, y el 3% de los mayores muere. Suponiendo además que ningún joven muere y no hay nacimientos hallar la matriz de transición que resulta de clasificar a la población en* `jóvenes`, `mayores` *y* `fallecidos`. *Hallar el estado estacionario para esta población.*

[3] en este ejercicio y en el siguiente se presentan dos modelos enormemente simplificados para describir la evolución de dos poblaciones. En ambos se introducen variables continuas para describir una variable esencialmente discreta como es el número de individuos de una cierta clase.

8 Producto escalar

116. *(*) Sea E el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $f_1 := (1,1,1,1)$, $f_2 := (1,0,-2,0)$ y $f_3 := (2,1,0,0)$, hállese una base ortonormal de E. El vector $e = (4,2,-1,1)$ es de E, hállese la expresión de e como combinación lineal de los vectores de esa base ortonormal.*

Solución

1. Se sobreentiende que el producto escalar que debemos usar en $\mathbb{R}^4$ es el **producto estandar**, que en la base estandar tiene matriz identidad.
2. Usamos el método de Gram-Schmidt:
   (a) Empezamos calculando una base ortogonal. El primer vector de la base será $e_1 =: f_1$. Tenemos que $< e_1, e_1 >= 4$ y que $< f_2, e_1 >= -1$. Calculamos el segundo vector de la base.
   (b) Tomamos la combinación lineal
   $$e_2 := f_2 - (\frac{< f_2, e_1 >}{< e_1, e_1 >})e_1 = (1,0,-2,0) + \frac{1}{4}(1,1,1,1) = (\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{1}{4}).$$
   Calculamos, para uso futuro,
   $$< e_2, e_2 >= \frac{19}{4}.$$
   (c) Para el tercer vector de la base
   $$\begin{aligned} e_3 &:= f_3 - (\frac{< f_3, e_1 >}{< e_1, e_1 >})e_1 - (\frac{< f_3, e_2 >}{< e_2, e_2 >})e_2 = \\ &= (2,1,0,0) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) - \frac{11}{19}(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{1}{4}) = (\frac{10}{19}, \frac{2}{19}, \frac{5}{19}, \frac{-17}{19}), \end{aligned}$$
   con
   $$< e_3, e_3 >= \frac{22}{19}.$$
   (d) Para obtener una base ortonormal basta dividir cada vector por su longitud, es decir, la base ortonormal es
   $$\frac{e_1}{2}, \frac{2e_2}{\sqrt{19}}, \frac{e_3}{\sqrt{22/19}}.$$
3. Para calcular las coordenadas de e empezamos en la base ortogonal:
   $$e = \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i e_i$$
   corresponde, igualando componente a componente el vector de la izquierda con el de la derecha, a un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que tiene solución
   $$\lambda_1 = \frac{3}{2},\ \lambda_2 = \frac{30}{19},\ \lambda_3 = 1.$$
   Estas son las tres coordenadas del vector e en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, es decir $e = (\frac{3}{2}, \frac{30}{19}, 1)$.
4. Para obtener las coordenadas en la base ortonormal, debemos multiplicar (¿por qué?) cada coordenada por el factor por el que antes hemos dividido cada vector de la base ortogonal para obtener la base ortonormal:
   $$e = (3, \frac{15\sqrt{19}}{19}, \sqrt{22/19}).$$

117. *(*) Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los dos vectores $e_1 := (1,1,1,1)$ y $e_2 := (1,0,-1,0)$. Hállese una base del subespacio $E_1^{\perp}$ ortogonal a E.*

Solución

1. Primero, observar que NO ES LO MISMO UNA BASE ORTOGONAL DE UN SUBESPACIO QUE UNA BASE DEL ORTOGONAL A UN SUBESPACIO. Este ejercicio es diferente al anterior.
2. Planteamos las ecuaciones
$$\begin{aligned} <(x,y,z,t),(1,1,1,1)> &= x+y+z+t &&= 0 \\ <(x,y,z,t),(1,0,-1,0)> &= x-z &&= 0, \end{aligned}$$
que tiene solución
$$\begin{aligned} y &= -2z-t \\ x &= z, \end{aligned}$$
de forma que una base del subespacio ortogonal $E_1^\perp$ está dada por los vectores
$$e_3 := (1,-2,1,0), e_4 := (0,-1,0,1).$$
3. Esta base de $E_1^\perp$ no tiene por qué ser ella misma una base ortogonal de $E_1^\perp$, y, de hecho, el producto escalar de los dos vectores de la base vale
$$<(1,-2,1,0),(0,-1,0,1)>= 2.$$
4. Para obtener una base ortogonal de $E_1^\perp$ deberíamos aplicar Gram-Schmidt a la base calculada.

118. *(*) Hállese la proyección ortogonal del vector $e = (1,2,-1,3)$ sobre el subespacio generado por los vectores $e_1 := (1,1,1,1)$ y $e_2 := (1,0,-1,0)$.*

SOLUCIÓN

1. Obsérvese que los vectores e_1 y e_2 son los mismos del ejercicio anterior.
2. Basta descomponer e como suma de un vector de E_1 y otro de $E_1^\perp$. Como la suma de estos subespacios es directa, la descomposición es única. La componente en E_1 es la proyección ortogonal.
3. Concretamente, planteamos, con los cuatro vectores del ejercicio anterior, el sistema
$$e = \sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i e_i,$$
que es un sistema no homogéneo de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.
Su solución es $(5/4, 1, -5/4, 7/4)$ y la proyección ortogonal buscada es
$$(5/4)e_1 + e_2.$$

119. *(*) Si E_1 es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de vectores (x,y,z,u) que cumplen $x + y + z + u = 0$, hállese*

i) una base de $E_1^\perp$,

ii) una matriz, escrita en la base estandar de $\mathbb{R}^4$, que tenga a E_1 por núcleo.

SOLUCIÓN

1. El conjunto de vectores que son ortogonales a los que satisfacen $x+y+z+t=0$ son los múltiplos de $(1,1,1,1)$ ya que se verifica
$$< x,y,z,t),(1,1,1,1) >= x+y+z+t = 0.$$
2. Operamos en la base de $\mathbb{R}^4$
$$\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(-1,1,0,0),(1,1,1,1)\}$$
con los tres primeros base de E_1 y el cuarto base de $E_1^\perp$.
En esta base una matriz con núcleo exactamente igual a E_1 es
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Cambiamos ahora esta matriz a la base estandar usando la matriz de cambio de base

$$P := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz buscada es

$$A_1 = P \cdot A \cdot P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. En este momento debemos darnos cuenta de la tontería que hemos hecho: una matriz simple que tenga núcleo el subespacio $x + y + z + t = 0$ es la matriz que tiene cuatro filas iguales a los coeficientes de la ecuación, es decir $(1, 1, 1, 1)$. El núcleo de una tal matriz se calcula resolviendo el sistema con 4 ecuaciones iguales a $x + y + z + t = 0$ y es E_1.

120. *(*) Hállese la distancia del punto $e = (1, 3, 2, -1)$ de $\mathbb{R}^4$ al subespacio E_1 determinado por las ecuaciones*

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{rrrrcl} 3x & -2y & +z & -u & = & 0 \\ x & +2y & -2z & -u & = & 0 \end{array} \right.$$

Ayuda

1. El ortogonal a E_1 está generado por los coeficientes de las dos ecuaciones. Entonces

$$E_1^{\perp} =< e_3 := (3, -2, 1, -1), e_4 := (1, 2, -2, -1) > .$$

2. Debemos calcular una base del subespacio E_1 , que es la solución del sistema $\mathcal{S}$. Para eso hay que reducir el sistema y dar valores adecuados a las variables libres. Resulta una base formada por dos vectores e_1 y e_2.
3. Hay que calcular la proyección de e sobre el subespacio E_1 y para eso hallamos las coordenadas de e en la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$e = \sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i e_i,$$

que es un sistema con 4 ecuaciones y 4 incógnitas y solución única. La proyección es el vector $\lambda_1^0 e_1 + \lambda_2^0 e_2$, con λ_1^0 y λ_2^0 las dos primeras coordenadas de la solución.

4. La distancia buscada es la longitud

$$\|e - \lambda_1^0 e_1 + \lambda_2^0 e_2\|.$$

121. *(*) Sea E_1 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $e_1 := (1, -3, 5)$, $e_2 := (2, -3, -1)$. Calcúlese la matriz P tal que para cada (x, y, z), el producto*

$$P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

nos dé las coordenadas de la proyección del vector (x, y, z) sobre E_1; en otras palabras, P es la matriz proyección sobre E_1.

Ayuda

1. Hay que calcular la proyección de un vector indeterminado $e := (x, y, z)$ sobre el subespacio E_1.
2. Podemos aplicar el mismo método, para calcular la proyección ortogonal del vector, que en los ejercicios anteriores, pero en este caso el sistema lineal que hay que resolver tiene como términos independientes las variables x, y, z.

122. *¿Cuál es la combinación lineal de $(1, 2, -1)$ y $(1, 0, 1)$ más próxima a $(2, 1, 1)$?*

123. *Sea E un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{S}$ una base de E, y sea $\mathcal{T}$ una base de $E^\perp$. Compruébese que $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ es una base de todo $\mathbb{R}^n$.*

124. *(*) Sea P la matriz de proyección sobre un subespacio E de $\mathbb{R}^n$. Compruébese que*

i) $P \cdot P = P$

ii) $Q = I_n - P$, *también cumple* $Q \cdot Q = Q$

iii) Q *es la matriz de proyección sobre* $E^\perp$

125. *Sea E un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Compruébese que todo vector de $\mathbb{R}^n$ se puede representar de manera única como suma de un vector de E y otro de $E^\perp$.*

126. *Para hallar la matriz de proyección P sobre el plano $E := x - y - 2z = 0$,*

1. *elegimos una base de ese plano, formamos la matriz que tiene a los vectores de esa base como columnas, y ...*
2. *hallamos un vector v perpendicular a E, calculamos la proyección sobre v, y ...*

Compárense los dos procedimientos.

127. *(*) Constrúyase una matriz 3×3 (sin ceros) cuyas columnas sean mutuamente perpendiculares. Calcúlese $A^T A$.*

128. *Sea A una matriz $n \times n$ cuyas columnas son un sistema ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^n$. Compruébese que las filas también son un sistema ortonormal de vectores.*

129. *(*) Encontrar una matriz ortogonal Q que diagonalice*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución

1. La matriz, en la base estandar de $\mathbb{R}^3$ que es ortonormal, es simétrica y, por tanto la matriz es autoadjunta y sus autovalores son reales con autovectores perpendiculares dos a dos.
2. Existe entonces una base ortonormal de autovectores.
3. La matriz de cambio de base a esa base de autovectores es la que los tiene como columnas, y es una matriz ortogonal ya que sus columnas son una base ortonormal. Esa es la matriz buscada.
4. Los autovalores son las raíces del polinomio característico
$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(\lambda^3 - 5\lambda + 4) = -(\lambda + 3)(\lambda)(\lambda - 3).$$
Los correspondientes autovectores, sin normalizar, son
$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -3 & e_1 = (-1/2, 1, 1) \\ \lambda_2 = 0 & e_2 = (-2, -2, 1) \\ \lambda_3 = 3 & e_3 = (1, -1/2, 1). \end{array}$$
Para terminar el ejercicio basta normalizar los vectores, dividiendo cada uno por su longitud, y colocarlos como columnas de la matriz Q buscada.

130. *(*) Hallar todas las matrices ortogonales que diagonalizan*
$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

131. *(*) Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones sobre matrices reales cuadradas son verdaderas y cuáles falsas:*

1. *una matriz con autovalores reales es simétrica;*
2. *el producto de matrices simétricas es una matriz simétrica;*
3. *si la inversa de una matriz simétrica existe entonces es simétrica;*
4. *la matriz de vectores propios de una matriz simétrica es simétrica.*

132. *En $\mathbf{R}^4$ con el producto escalar estandar, encontrar bases ortonormales para los subespacios generados por los siguientes vectores:*

1. $(1, 1, 0, 0), (0, 2, 2, 0), (0, 0, 4, 1)$
2. $(3, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 0), (0, -2, 1, 2)$

133. *¿Bajo qué condiciones es el producto de transformaciones autoadjuntas autoadjunto? ¿ Y la suma?*

134. *(*) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que u sea una isometría de E de cuadrado identidad ($u^2 = I$) es que $v := (u - I)/2$ sea la proyección ortogonal sobre un subespacio de E.*

9 Formas cuadráticas

135. *Demostrar que la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ es definida positiva si y sólo si $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$.*

136. *Reducir las formas cuadráticas*

1. $Q_1(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^2$.
2. $Q_2(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + yz$.
3. $Q_3(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 8xy + 4xz + 4yz$.
4. $Q_4(x,y,z) = xy + xz + yz$.

Solución

1. (Apartado #1) Completamos cuadrados:

$$Q_1(x,y) = 2(x^2+2xy+(1/2)y^2) = 2((x+y)^2-y^2+(1/2)y^2) = 2((x+y)^2-(1/2)y^2) = \\ = 2(x+y)^2 - y^2.$$

Sobre los racionales la forma ya está reducida. Sobre los reales se puede reducir más, para obtener

$$(\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)^2 - y^2,$$

que, mediante el cambio de coordenadas

$$x_1 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y,\ y_1 = y,$$

queda

$$x_1^2 - y_1^2.$$

Sobre los complejos todavía se puede reducir, mediante el cambio que, mediante el cambio de coordenadas

$$x_2 = x_1,\ y_2 = (iy_1),$$

a

$$x_2^2 + y_2^2.$$

2. (Apartado #2)

$$Q_2(x,y,z) = x^2+2x(3y+z)+(2y^2+z^2+yz) = (x+3y+z)^2-(3y+z)^2+(2y^2+z^2+yz) = \\ = (x+3y+z)^2 - 7y^2 - 5yz + 0z^2 = (x+3y+z)^2 - 7(y^2 + (5/7)yz) = \\ = (x+3y+z)^2-7((y+(5/14)z)^2-(5/14)^2z^2) = (x+3y+z)^2-7((y+(5/14)z)^2+(25/28)z^2$$

Mediante el cambio de coordenadas

$$x_1 = x + 3y + z,\ y_1 = y + (5/14)z,\ z_1 = (5/2)z,$$

obtenemos la forma reducida, sobre los racionales,

$$x_1^2 - 7y_1^2 + (1/7)z_1^2.$$

3.
4. (Apartado #4)

$$Q_4(x,y,z) = (x+z)(y+z) - z^2 = (1/4)(x+y+2z)^2 - (1/4)(x-y)^2 - z^2,$$

que mediante el cambio

$$x_1 = (1/2)(x+y+2z),\ y_1 = (1/2)(x-y),\ z_1 = z$$

nos da

$$x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$$

como forma reducida sobre los racionales.

137. *Reducir (sobre los racionales, los reales y los complejos) a sumas de cuadrados (diagonalizar) las siguientes formas cuadráticas:*

1. $4x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
2. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$;

4. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

5. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

138. *Probar que el polinomio dado es un producto de factores lineales, indicando el cuerpo sobre el que se ha calculado, y hallar los factores:*

1. $x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

2. $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$;

3. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

Ayuda

Se trata de ver si la forma cuadrática es o no de rango dos. Si es de rango dos podemos ver que, al menos sobre los complejos, siempre es el producto de factores lineales ya que

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy).$$

El que se factorize o no sobre los racionales o los reales depende de los coeficientes que queden, después de reducir, para x^2 e y^2.

139. *Reducir (sobre los racionales, los reales y los complejos) a sumas de cuadrados (diagonalizar) las siguientes formas cuadráticas:*

1. $2x^2 + 3y^2 - z^2 + 5t^2 - 2xy + 2xz + 4yz - 2yt + 4xt$;

2. $x^2 + 2y^2 + z^2 + 9t^2 - 6xz + 4yz + 8yt - 2xt - 2zt$;

3. $x^2 + 5y^2 - 4z^2 - t^2 + 4xy - 6xz - 2yz + 2yt$;

4. $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 21t^2 + 6yt - 8xt - 12zt$;