

# Álgebra Lineal y el formato JPEG

## Álgebra II

1º Ingeniería Informática

<http://www.uam.es/fernando.chamizo>

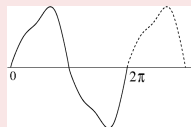
# Índice

- 1 Ondas continuas
- 2 Ondas discretas
- 3 B/N
- 4 Minifotos
- 5 JPEG
- 6 Ejemplos
- 7 Referencias

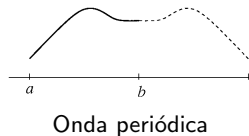
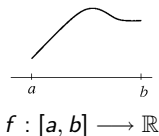
# Motivación

## Análisis de Fourier

Las ondas periódicas son superposiciones de tonos puros.



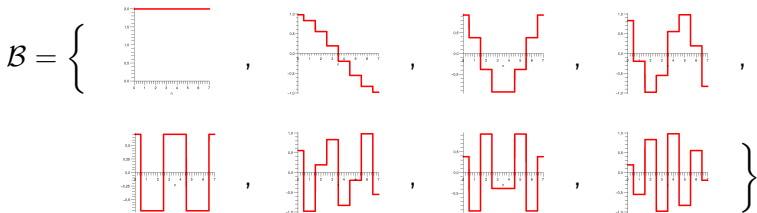
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$



## Funciones discretizadas

$$V = \{f : \{0, 1, \dots, 7\} \rightarrow \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^8 \quad \dim V = 8$$

Los (medios) tonos puros discretizados son una base de  $V$



# Funciones en blanco y negro

tonos de gris  $\longleftrightarrow [-1, 1]$ ,    negro  $\leftrightarrow -1$ ,    blanco  $\leftrightarrow 1$



Cada  $f : \{0, 1, \dots, 7\} \rightarrow [-1, 1]$  corresponde a una tira de 8 tonos de gris que son combinación lineal de los elementos de la base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{cccc} \text{[white]} & , & \text{[white, gray, black]} & , & \text{[white, black, gray]} & , & \text{[white, black, gray, black]} & , \\ \text{[black, gray, black]} & , & \text{[black, gray, black]} & , & \text{[black, gray, black]} & , & \text{[black, gray, black]} & \end{array} \right\}$$

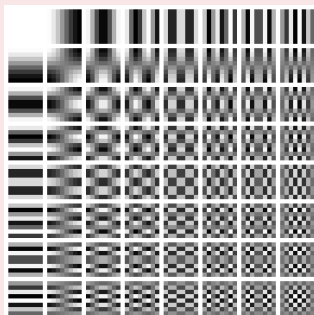
# Fotos de 8 pixels

Foto  $8 \times 8$  en blanco y negro = tabla  $8 \times 8$  de tonos de gris

Lo mismo ocurre en dos dimensiones y cada tabla  $8 \times 8$  de tonos de gris ( $\cong \mathbb{R}^{64}$ ) se escribe como combinación lineal de los 64 elementos de la base correspondientes a tonos puros

Elementos  
de la base

=



# Algunas observaciones

## Obs. 1

Podemos representar una minifoto  $8 \times 8$  en blanco y negro con las 64 coordenadas respecto a esta base.

## Obs. 2

En principio no parece entrañar ninguna ventaja con respecto a almacenar los valores de cada uno de los 64 pixels, que es como hallar las coordenadas en la base usual.

## Obs. 3

La base elegida es más conveniente porque se prestará mejor a una compresión con pérdidas de información que apenas se reflejen en la calidad visual de la imagen.

## Algunas observaciones

En la mayor parte de las porciones  $8 \times 8$  de fotos reales no hay grandes cambios entre píxeles próximos. Entonces los elementos de la base con muchas oscilaciones no aparecerán o lo harán con coeficientes pequeños.





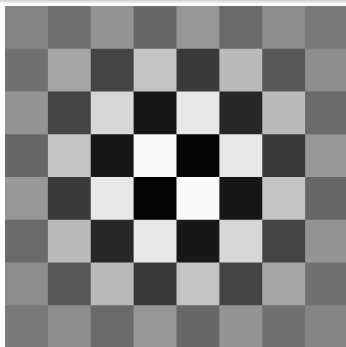
# Algunas observaciones

En la mayor parte de las porciones  $8 \times 8$  de fotos reales no hay grandes cambios entre píxeles próximos. Entonces los elementos de la base con muchas oscilaciones no aparecerán o lo harán con coeficientes pequeños.

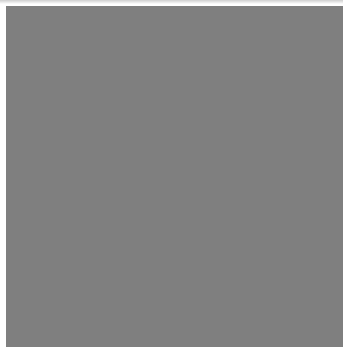


# Algunas observaciones

Las oscilaciones entre pixels cercanos son visualmente poco distinguibles



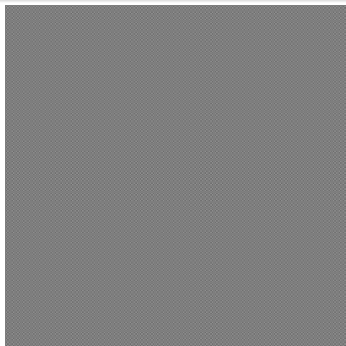
último elemento de la base  
(zoom 64)



color cero

# Algunas observaciones

Las oscilaciones entre pixels cercanos son visualmente poco distinguibles



último elemento de la base  
mosaico (zoom  $\approx 1$ )



color cero

# El formato

## JPEG

- 1 Cada foto se divide en minifotos  $8 \times 8$  y a cada uno se le asignan las 64 coordenadas (algoritmo: DCT, esencialmente cambia de la base usual a la nueva).
- 2 Se ponen pocos decimales (o un cero) en las coordenadas asociadas a elementos menos distinguibles (algoritmo: cuantización, hay una tabla experimental de cómo es de visible cada elemento de la base).
- 3 Se almacenan los números en forma comprimida (algoritmo: Huffman u otros).

En el segundo punto es donde se pierde información no detectable a simple vista.

# Ejemplos



Imagen original



Sin las coordenadas  $< 40$   
Coord. no nulas = 3,88 %

# Ejemplos



Imagen original



Sin las coordenadas  $< 80$   
Coord. no nulas = 2,37 %

# Ejemplos



Imagen original



Sin las coordenadas  $< 120$   
Coord. no nulas = 1,98 %

# Ejemplos



Imagen original



Sin las coordenadas  $< 1000$   
Coord. no nulas = 0,82 %





Coord. no nulas = 3,88 %



Coord. no nulas = 2,37 %



Coord. no nulas = 1,98 %



Coord. no nulas = 0,82 %











## Referencias

- G.K. Wallace. (standard) <http://white.stanford.edu/%7Ebrian/psy221/reader/Wallace.JPEG.pdf>
- JPEG en Wikipedia (en inglés)  
<http://en.wikipedia.org/wiki/JPEG>
- S. Mallat "A wavelet tour of signal processing".
- A. Terras. "Fourier Analysis on Finite Groups and Applications". (Sobre transformadas de Fourier discretas).
- T.W. Körner. "Fourier Analysis". (Sobre análisis de Fourier especialmente continuo).