Soluciones del examen de Álgebra II del 2 de junio de 2008

1. Recuérdese que la traspuesta de un producto de matrices satisface $(AB)^t = B^tA^t$ y que el producto de matrices es asociativo: $(AB)C = A(BC)$.

(a) **Verdadero.** Se cumple $ABB^tA^t = AB(AB)^t$ y CC^t es siempre simétrica porque $(CC^t)^t = (C^t)^tC^t = CC^t$.

(b) **Verdadero.** Por definición si A y B son ortogonales $AA^t = BB^t = I$, usando estas relaciones $AB(AB)^t = ABB^tA^t = A(BB^t)A^t = AA^t = I$.

(c) **Falso.** Por ejemplo, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(d) **Verdadero.** Si $|A| \neq 0$ entonces $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ es un isomorfismo $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, en particular aplica vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$ en vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$, por tanto el número máximo de columnas linealmente independientes de AB y B coincide.

2. Recuérdese que $\dim \operatorname{Im}(T)$ coincide con el rango de la matriz de T que en este caso es

$$A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el determinante

$$|A| \underset{f_1 + = f_2 - f_1}{=} \begin{vmatrix} -m & -m & -m \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = -m(m-2)(m-1).$$

Si $m \notin \{0,1,2\}$ se cumple $\operatorname{rg}(A) = 3$, mientras que si $m \in \{0,1,2\}$ se tiene $\operatorname{rg}(A) = 2$ porque $\operatorname{rg}(A) < 3$ y $\operatorname{rg}(A) > 1$ ya que para cada uno de estos tres valores la primera y la segunda columnas de A son linealmente independientes (no son proporcionales).

Empleando la relación $\dim V = \dim \operatorname{Nuc}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$ que en nuestro caso se lee $3 = \dim \operatorname{Nuc}(T) + \operatorname{rg}(A)$, se concluye

$$\dim \operatorname{Nuc}(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \{0,1,2\} \\ 0 & \text{si } m \notin \{0,1,2\} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \dim \operatorname{Im}(T) = \begin{cases} 2 & \text{si } m \in \{0,1,2\} \\ 3 & \text{si } m \notin \{0,1,2\}. \end{cases}$$

3. Escribiremos $Q_1 = 1$, $Q_2 = x$, $Q_3 = x^2$.

(a) Un cálculo prueba

$$f(Q_1) = 3 = 3Q_1, \quad f(Q_2) = 3x - x^2 = 3Q_2 - Q_3, \quad f(Q_3) = -x + 3x^2 = -Q_2 + 3Q_3.$$

Colocando las componentes en columna obtenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{en la base } \{Q_1, Q_2, Q_3\}.$$

(b) El polinomio característico de A es $|A-\lambda I| = (3-\lambda)\big((3-\lambda)^2-1\big)$ y sus raíces son 3 y 3 ± 1, es decir, los autovalores son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$. Ahora calculamos vectores $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ con $(A-\lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0}$. Esto da lugar a unos sistemas indeterminados muy sencillos. Las soluciones aquí indicadas pueden multiplicarse por constantes (no nulas):

$$\begin{array}{rlll}
\vec{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) & \text{resuelve} & (A-\lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0} \longmapsto & P_1 = Q_1 \\
\vec{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right) & \text{resuelve} & (A-\lambda_2 I)\vec{v}_2 = \vec{0} \longmapsto & P_2 = Q_2 + Q_3 \\
\vec{v}_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-1\end{smallmatrix}\right) & \text{resuelve} & (A-\lambda_3 I)\vec{v}_3 = \vec{0} \longmapsto & P_3 = Q_2 - Q_3.
\end{array}$$

Estos vectores son linealmente independientes porque provienen de autovalores distintos, como $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, generan todo el espacio. Entonces una posible base es $B = \{1, x + x^2, x - x^2\}$.

4. Abreviaremos la matriz de ϕ por B, de modo que $\phi(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^t B \vec{y}$.

(a) Un producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva. Por la forma de ϕ, es claramente bilineal y también simétrica ya que $B = B^t$. Para probar que $\vec{x}^t B \vec{x} > 0$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ se pueden completar cuadrados (algoritmo de Gauss) o usar el criterio de Sylvester que en este caso se verifica porque $2 > 0$, $\left|\begin{smallmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right| > 0$ y

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 12 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_1 += -2f_2 \\ f_3 += -2f_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 14 \end{vmatrix} > 0.$$

(b) Llamando λ y μ a los valores (arbitrarios) de x_3 y x_2 se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 \qquad \text{con } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por definición, $W^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \phi(\vec{e}_1,\vec{x}) = \phi(\vec{e}_2,\vec{x}) = 0\}$. Un cálculo prueba $\vec{e}_1^{\,t} B = (4,0,14)$ y $\vec{e}_2^{\,t} B = (1,1,-1)$. Entonces $W^\perp = \big\{2x_1 + 7x_3 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\big\}$. Resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow W^\perp = \langle \vec{e}_3 \rangle \quad \text{con } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y $\{\vec{e}_3\}$ es la base buscada.

(c) Como $W^\perp$ está generado por un solo vector, $\mathrm{Pr}_{W^\perp}(\vec{v})$ es fácil de hallar y empleando la fórmula $\vec{v} = \mathrm{Pr}_W(\vec{v}) + \mathrm{Pr}_{W^\perp}(\vec{v})$ se deduce

$$\mathrm{Pr}_W(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\phi(\vec{e}_3,\vec{v})}{\phi(\vec{e}_3,\vec{e}_3)}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{18}{9}\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$