Resumen del capítulo 9

Producto escalar En $\mathbb{R}^n$ el producto escalar usual se define como $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ donde x_i e y_i son las coordenadas de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ (en la base canónica).

En general se dice que una función $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ define un *producto escalar* en V si satisface las propiedades siguientes

1. $f(\vec{x},\vec{x}) \ge 0$ y $f(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2. $f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$
3. f es lineal en cada variable, esto es,

$$f(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2,\vec{y}) = \lambda_1 f(\vec{x}_1,\vec{y}) + \lambda_2 f(\vec{x}_2,\vec{y})$$
$$f(\vec{x},\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2) = \lambda_1 f(\vec{x},\vec{y}_1) + \lambda_2 f(\vec{x},\vec{y}_2)$$

Los espacios vectoriales en los que se ha definido un producto escalar se dice que son *espacios vectoriales euclídeos*. Las notaciones más empleadas para indicar productos escalares son $f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$ y $f(\vec{x},\vec{y}) = \langle\vec{x},\vec{y}\rangle$. También a veces se emplea $(\vec{x},\vec{y})$.

Por ejemplo en $\mathbb{R}_n[x]$ (los polinomios reales de grado $\le n$) $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 PQ$ define un producto escalar. En $\mathbb{R}^n$ existen productos escalares diferentes del usual. Por ejemplo

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Para comprobar la primera propiedad es conveniente escribir $\vec{x}\cdot\vec{x} = (x_1+x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$. Más adelante veremos un algoritmo para decidir esta la primera propiedad.

Dado un vector $\vec{x}$ de un espacio vectorial euclídeo, se define su *norma* como $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$ y se dice que el vector es *unitario* si $\|\vec{x}\| = 1$. Dos vectores son *ortogonales* si su producto escalar es nulo. Al dividir un vector no nulo por su norma se obtiene siempre un vector unitario. A este proceso se le llama *normalización*.

Cualquier producto escalar satisface siempre las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Minkowski, dadas respectivamente, por

$$\vec{x}\cdot\vec{y} \le \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \qquad \text{y} \qquad \|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Con un producto escalar se pueden definir distancias y ángulos (que pueden no coincidir con los medidos con el producto escalar usual): $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$, $\cos\alpha = \vec{x}\cdot\vec{y}/(\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|)$.

Formas bilineales Una *forma bilineal* es una función $f : V \times V \longrightarrow K$ que es lineal en cada variable. En este curso $K = \mathbb{R}$ y una forma bilineal será simplemente una función que cumple la tercera propiedad del producto escalar.

Se dice que una forma bilineal es *simétrica* si $f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$ y que es *definida positiva* si $f(\vec{x},\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \ne \vec{0}$. Con estas definiciones se tiene que un producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva.

No todas las formas bilineales son productos escalares. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ la función f que asigna a cada par de vectores el determinante de sus coordenadas puestas en columna, es bilineal pero no un producto escalar porque $f(\vec{x},\vec{x})=0$ para todo $\vec{x}$.

Fijada una base $B=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ a cada forma bilineal f se le asigna la matriz A que tiene como elemento a_{ij} a $f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$.

Por ejemplo, al producto escalar definido antes en el espacio de polinomios en el caso $n=2$ con la base canónica $\{1,x,x^2\}$ le correspondería la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} \int_{-1}^1 1\cdot 1\,dx & \int_{-1}^1 1\cdot x\,dx & \int_{-1}^1 1\cdot x^2\,dx \\ \int_{-1}^1 x\cdot 1\,dx & \int_{-1}^1 x\cdot x\,dx & \int_{-1}^1 x\cdot x^2\,dx \\ \int_{-1}^1 x^2\cdot 1\,dx & \int_{-1}^1 x^2\cdot x\,dx & \int_{-1}^1 x^2\cdot x^2\,dx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Al emplear otra base $B'=\{\vec{e}\,'_1,\dots,\vec{e}\,'_n\}$, la matriz A de una forma bilineal f cambiará a una nueva matriz A' que se puede calcular o bien directamente con la definición $a'_{ij}=f(\vec{e}\,'_i,\vec{e}\,'_j)$ o bien con la fórmula de cambio de base para formas bilineales $A'=C^tAC$ donde C es la matriz de cambio de base de B' a B.

Por ejemplo, empleando la base $B'=\{1,x,3x^2-1\}$ la matriz correspondiente al producto escalar $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 PQ$ sería ahora rehaciendo los cálculos

$$A'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/5 \end{pmatrix},$$

Reconocemos que los vectores de B' son ortogonales porque la matriz es diagonal ($f(\vec{e}\,'_i,\vec{e}\,'_j)=0$ si $i\neq j$). Según la fórmula de cambio de base anterior, A' coincide con

$$C^tAC=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde C se ha construido con las coordenadas de los elementos de B' (respecto de la base B).