Resumen del capítulo 8

Valores y vectores propios Dado un endomorfismo, esto es, una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$, se dice que un vector $\vec{v} \in V$ no nulo es un *autovector* o *vector propio* si verifica $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ para algún $\lambda \in K$. Este número λ se llama *autovalor* o *valor propio*.

Cualquier múltiplo no nulo de un vector propio es también vector propio.

Si se tiene una aplicación $f : K^n \longrightarrow K^n$ dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, entonces el sistema $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ debe tener soluciones no triviales (que son autovectores) cuando λ sea autovalor. Esto prueba que los valores propios son las raíces de la ecuación algebraica $|A - \lambda I| = 0$, llamada *ecuación característica*. Una vez hallados los autovalores, los autovectores se obtienen resolviendo el sistema $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

Todas las aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow V$ tienen una matriz, una vez fijada una base, y se corresponden con el caso anterior. A veces, con un poco de falta de rigor, se habla de los valores y vectores propios de una matrices para referirse a los de la aplicación del tipo anterior con A especificada.

Calculemos todos los autovalores y autovectores de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Unos cálculos, que se pueden simplificar con las propiedades de los determinantes, prueban que la ecuación característica es

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 40\lambda + 36 = (9 - \lambda)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Por tanto hay dos autovalores: $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 2$. Resolviendo los sistemas lineales $(A - 9I)\vec{x} = \vec{0}$ y $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$ se tiene que los autovectores con autovalores λ_1 y λ_2 son, respectivamente, los vectores no nulos de los subespacios:

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Un teorema asegura que los autovectores correspondientes a diferentes autovalores son siempre linealmente independientes.

Diagonalización Se dice que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ es *diagonalizable* si existe una base B de V en la que su matriz es diagonal.

Una aplicación lineal es diagonalizable si y sólo si existe una base formada por autovectores (y ésta es una base B válida en la definición anterior).

Con el abuso de notación obvio muchas veces se dice que una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ es diagonalizable para indicar que la aplicación $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, definida de K^n en K^n, lo es.

Por ejemplo, la matriz A indicada anteriormente es diagonalizable porque

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores.

No todas las aplicaciones lineales son diagonalizables. El caso más obvio ocurre cuando no podemos resolver la ecuación característica en el cuerpo K en el que trabajamos. Por ejemplo, la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ lleva a la ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$ que no tiene solución en los reales. Podríamos extender la aplicación a $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ con la misma fórmula y tendríamos los autovalores $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ (con $i = \sqrt{-1}$) y sí sería diagonalizable en la base de vectores propios complejos $\left\{\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ y } \left(\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Incluso con este tipo de extensiones a los complejos no todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ son diagonalizables. Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tiene sólo el autovalor $\lambda_1 = 2$ y el subespacio formado por los autovectores (y el $\vec{0}$) tiene dimensión uno, por tanto no hay suficientes autovectores para formar una base.

En el caso diagonalizable, la fórmula de cambio de base relaciona la matriz original con la matriz diagonal a través de las coordenadas de los vectores de la base en que estamos diagonalizando. En general la fórmula responde al esquema $D = C^{-1}AC$.

En el ejemplo que hemos venido manejando, se tendría

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es importante el orden relativo en que se ordenan los autovalores y autovectores, así el primer elemento de la matriz diagonal, $d_{11} = 9$, es un autovalor que corresponde al autovector indicado por la primera columna en la matriz de cambio de base.

Aplicaciones Hay varias aplicaciones de la diagonalización a temas fuera de la propia álgebra lineal. Revisamos dos de ellas a través de sendos ejemplos:

1) Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Deseamos hallar las funciones regulares $x = x(t)$ e $y = y(t)$ que satisfacen la relación

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + 4y \end{cases} \quad \text{que en forma matricial es } \vec{f}\,' = A\vec{f} \text{ con } \vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizando se tiene

$$D = C^{-1}AC \qquad \text{donde } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues $\vec{f}\,' = CDC^{-1}\vec{f}$. Escribiendo $\vec{g} = C^{-1}\vec{f}$ se transforma en $\vec{g}\,' = D\vec{g}$ que es muy fácil de resolver como $\vec{g} = \left(\begin{smallmatrix} K_1 e^{2t} \\ K_2 e^{3t} \end{smallmatrix}\right)$ con K_1, K_2 constantes arbitrarias. La solución del sistema inicial será $\vec{f} = C\vec{g}$.

2) Resolución de ecuaciones de recurrencia.

Supongamos que queremos hallar todas las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfacen

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases} \quad \text{o equivalentemente } \vec{s}_{n+1} = A\vec{s}_n \text{ con } \vec{s}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

que en cierta manera es la variante discreta del problema anterior (las derivadas vienen de incrementos infinitesimales). Iterando obtenemos que la solución es $\vec{s}_n = A^n \vec{s}_0$ y el problema consiste en hallar una fórmula para la potencia n-ésima de una matriz. Diagonalizando como antes $A = CDC^{-1}$ implica $A^n = CD^nC^{-1}$ y se obtiene

$$\vec{s}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \vec{s}_0.$$