Resumen del capítulo 6

Rango Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se define su *rango*, y se denota con $\mathrm{rg}(A)$, como el número máximo de columnas de A linealmente independientes.

Según hemos visto, si $f : K^n \longrightarrow K^m$ viene dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ entonces $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Im}(f)$.

El rango se puede calcular aplicando el algoritmo de reducción de Gauss sobre la matriz. El número de columnas pivotes (que es el número de escalones) coincide con el rango y además las columnas de A en los lugares de las columnas pivotes dan una base del subespacio de K^m generado por las columnas. Esto es útil para calcular bases de $\mathrm{Im}(f)$ y en general de cualquier subespacio de K^m expresado mediante generadores.

Por ejemplo, sea la matriz de $\mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

y llamamemos $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ a sus columnas, que generan $\mathrm{Im}(f)$ para f como antes. Con unos cálculos la reducción de Gauss lleva a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango es tres y como las columnas pivote son la primera, la segunda y la cuarta, se tiene que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$.

Nótese entonces que para cualquier aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow K^m$ (y todas entre espacios vectoriales de dimensión finita se podían reducir a este caso), los cálculos de la reducción de Gauss para hallar el núcleo se pueden aprovechar para hallar una base de la imagen.

Teorema de Rouché–Frobenius Consideremos un sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ e introduzcamos la *matriz aumentada* $A^+ = (A|\vec{b})$ obtenida al añadir $\vec{b}$ a A como última columna.

El teorema de Rouché–Frobenius[1] afirma que el sistema es

1. *Compatible determinado* (tiene solución única) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^+) = n$.
2. *Compatible indeterminado* (tiene solución pero no es única) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^+) \neq n$.
3. *Incompatible* (no tiene solución) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^+)$.

En ejemplos numéricos el mismo cálculo que lleva al rango también lleva a la solución o a que no existe, por tanto su interés práctico en estos casos es limitado.

[1] Este nombre prácticamente sólo se usa en los textos escritos por autores hispanos, parece ser que por influencia del matemático hispanoargentino J. Rey Pastor (1888–1962).

Cambio de base para matrices de aplicaciones lineales Si en V (espacio vectorial de dimensión finita) se fija una base B entonces cada aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ tiene asociada una matriz cuadrada A. Al cambiar la base B por otra base B', la matriz cambia a una nueva matriz A' mediante la fórmula:

$$A' = M_{BB'}\ A\ M_{B'B}$$

donde $M_{B'B}$ es la llamada *matriz de cambio de base* de B' a B. Sus columnas son las coordenadas en la base B de los elementos de la base B'. Se cumple $M_{BB'} = M_{B'B}^{-1}$.

Por ejemplo, si tenemos la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces A es la matriz de f en la base canónica B. Si queremos averiguar la matriz A' de f en la base $B' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ (éstas son las coordenadas con respecto a la base canónica) se tiene según la fórmula

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & -37 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}.$$

Si llamamos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ a los vectores de B', una forma alternativa de proceder es calcular $f(\vec{v}_1)$ y $f(\vec{v}_2)$ es expresarlos como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Las coordenadas serán las columnas de A', así $f(\vec{v}_1) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 10 \end{smallmatrix}\right) = -22\vec{v}_1 + 16\vec{v}_2$, $f(\vec{v}_2) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 17 \end{smallmatrix}\right) = -37\vec{v}_1 + 27\vec{v}_2$.