Resumen del capítulo 5

Suma e intersección de subespacios Hay dos operaciones naturales que se pueden aplicar sobre los subespacios para producir otros nuevos.

1. Dados dos subespacios V y W de un mismo espacio vectorial, su intersección $V \cap W$ también es un subespacio.

2. Dados V y W como antes, se define el *subespacio suma* como

$$V + W = \{\vec{v} + \vec{w} \ : \ \vec{v} \in V, \ \vec{w} \in W\}.$$

Para calcular la intersección de dos subespacios de K^n dados por ecuaciones, simplemente se añaden las ecuaciones del primero a las del segundo.

Para calcular la suma de dos subespacios dados por generadores, simplemente se añaden los generadores del primero a los del segundo.

Por ejemplo, digamos que queremos calcular la intersección y la suma de los subespacios de $\mathbb{R}^4$, V y W, que tienen bases $B_V = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_W = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ con

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La suma es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$. Un cálculo, que no se incluye, prueba que no es linealmente independiente pero $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sí lo es. Así pues este último conjunto es una base de $V + W$ y se tiene $\dim(V + W) = 3$.

Para hallar la intersección hallamos las ecuaciones de V y W por el procedimiento ya estudiado, obteniéndose

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}\}, \qquad W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}\}.$$

El subespacio $V \cap W$ se obtiene poniendo estas cuatro ecuaciones juntas. Resolviendo el sistema cuatro por cuatro resultante, se sigue que hay un sólo vector que genera el subespacio, por tanto $\dim(V \cap W) = 1$.

Se verifica siempre la *fórmula de Grassman*:

$$\dim V + \dim W = \dim(V \cap W) + \dim(V + W).$$

En el ejemplo anterior, a partir de $\dim V = 2$, $\dim W = 2$, $\dim(V \cap W) = 1$ podríamos haber deducido que $\dim(V + W) = 3$ y por tanto que en el conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ sobraba un vector para llegar a una base.

Si $E = V + W$ y $V \cap W = \{\vec{0}\}$, se dice que E es *suma directa* de V y W y se suele escribir $E = V \oplus W$. En ese caso cada vector $\vec{e} \in E$ se escribe de forma única como $\vec{e} = \vec{v} + \vec{w}$ con $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in W$.