# Resumen del capítulo 4

**Bases y dimensión** Una *base* $B$ de un espacio vectorial $V$ es un subconjunto que verifica $\langle B\rangle = V$ (*sistema de generadores*) y que es linealmente independiente.

En este curso sólo trataremos el caso de bases con un número finito de elementos. Es conveniente considerar las bases como conjuntos ordenados (es decir, no cambiaremos la ordenación de los vectores que la componen).

Dada una base $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ cada vector $\vec{v}$ se puede escribir de forma única como combinación lineal $\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \dots + \lambda_n\vec{b}_n$. Los números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se llaman *coordenadas* o *componentes* de $\vec{v}$ en la base $B$.

Un espacio vectorial $V$ puede tener muchas bases pero todas ellas tienen el mismo número de elementos, llamado *dimensión* que se indica con $\dim V$.

En $K^n$ se llama *base canónica* a $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ donde $\vec{e}_i$ es el vector que tiene en el $i$-ésimo lugar un uno y en el resto ceros. Esta base canónica se puede extender al espacio de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ considerando $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{mn}\}$ donde $\vec{e}_i$ es la matriz que tiene en el $i$-ésimo lugar un uno y en el resto ceros, donde se cuentan los lugares de izquierda a derecha y de arriba a abajo. En el espacio $K_n[t]$ formado por los polinomios de grado menor o igual que $n$ en la variable $t$, la base llamada canónica es $\{1, t, \dots, t^n\}$. Con estos ejemplos se tiene $\dim K^n = n$, $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(K) = mn$ y $\dim K_n[t] = n + 1$. El espacio vectorial trivial $V = \{\vec{0}\}$ tiene dimensión cero.

En un espacio vectorial de dimensión $n$ siempre $n$ vectores linealmente independientes forman una base. Así por ejemplo $\{1+x-x^2, 7+x, 5-7x\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ porque claramente estos polinomios son linealmente independientes y sabemos que $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$.

Una aplicación lineal $f : K^n \longrightarrow K^m$ se puede escribir siempre como $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Las columnas de $A$ son las imágenes de los vectores de la base canónica.

Fijada una base $B$ de un espacio vectorial $V$ de dimensión $n$, la aplicación que asigna a cada vector de $V$ sus coordenadas en la base $B$ define un isomorfismo (una aplicación lineal biyectiva) de $V$ en $K^n$. Esto prueba que cualquier espacio vectorial (de dimensión finita) es isomorfo a algún $K^n$, es decir, es igual salvo renombrar sus vectores. Con ello podemos asignar una matriz a una aplicación lineal entre espacios que no son necesariamente $K^n$ siempre que hayamos fijado bases.

Por ejemplo $f(P) = P + P'$ (con $P'$ la derivada de $P$) es una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ y si fijamos la base canónica, cada polinomio $a + bx + cx^2$ estará asociado al vector de $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $a$, $b$ y $c$. El efecto de la aplicación $f$ se puede traducir a $\mathbb{R}^3$:

$$f(a + bx + cx^2) = (a + b) + (b + 2c)x + cx^2 \quad \leftrightarrow \quad \widetilde{f}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+2c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Esta última matriz $3\times 3$ diremos que es la matriz asociada a $f$ cuando se emplea la base $B$.

Problemas acerca del núcleo y la imagen pueden ser más naturales o mecánicos en $K^n$. En el ejemplo anterior es fácil ver que $\text{Nuc}(\widetilde{f}) = \{\vec{0}\}$ y de ello se concluye $\text{Nuc}(f) = \{0\}$. De hecho, la matriz obtenida es invertible y así $\widetilde{f}$ es un isomorfismo (una aplicación $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ define un isomorfismo si y sólo si $A$ es cuadrada e invertible) y se deduce que $f$ tabién lo es.

Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ siempre se cumple la relación:

$$\dim V = \dim \text{Nuc}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

En el ejemplo anterior a partir de $\text{Nuc}(f) = \{0\}$ se tiene por esta fórmula $\dim \text{Im}(f) = 3$ sin necesidad de hallar la imagen, porque $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, que con la inclusión $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$ implica $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$ (porque los elementos de la base de $\text{Im}(f)$ serán tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}_2[x]$ y por consiguiente deben generar este espacio).