Resumen del capítulo 2

Matrices y sus operaciones Ya habíamos visto que una *matriz* A es simplemente una tabla de números. La notación habitual es llamar a_{ij} al elemento que está en la fila i y en la columna j.

Denotaremos mediante $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con coeficientes en un cuerpo[1] K.

Las matrices de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se suman de la forma esperada: sumando los elementos en las mismas posiciones. Para multiplicarlas por $\lambda \in K$ se multiplica cada elemento por λ.

La multiplicación de dos matrices sólo se define si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}(K)$ entonces $AB \in \mathcal{M}_{m\times l}(K)$. El elemento ij del producto se calcula con la fórmula $\sum a_{ik}b_{kj}$. Esto equivale a decir que se hace el producto escalar habitual de la fila i de A por la columna j de B.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8 & 3\\ -17 & 6\end{pmatrix}.$$

Dada una matriz A, se llama *matriz traspuesta*, y se denota con A^t, a la obtenida al intercambiar las filas por las columnas en A.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \qquad A^t = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Con respecto a la suma y el producto, la traspuesta tiene las propiedades:

$$1)\ (A+B)^t = A^t + B^t, \qquad 2)\ (AB)^t = B^tA^t$$

Tipos de matrices y matrices especiales:

Las matrices de $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, por razones obvias, se dice que son *matrices cuadradas*.

Las matrices cuadradas A tales que $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$ se denominan *matrices diagonales*.

La matriz diagonal $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ tal que $a_{ii} = 1$ para todo i se dice que es la *matriz identidad* y se suele denotar con I. Es el elemento neutro de la multiplicación en $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$, es decir $A = IA = AI$ para cualquier $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

La matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ que tiene todos sus elementos cero se llama *matriz nula* y a veces se denota con O. Es el elemento neutro de la suma, es decir $A = A + O = O + A$.

[1] Un cuerpo es, intuitivamente, un conjunto en el que se puede sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por cero) con las propiedades habituales. En este curso el cuerpo más común será $\mathbb{R}$ pero también están $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ o las clases de restos módulo un número primo.

Matriz inversa Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ se dice que es *invertible* y que su *matriz inversa* es $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ si $I = AB = BA$. A la matriz inversa de A se la denota con A^{-1}.

La inversa puede no existir, pero si existe es única.

Algunas propiedades de la inversa:

$$1)\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad 2)\ (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \qquad 3)\ (A^{-1})^{-1} = A.$$

Para hallar la matriz inversa de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ uno puede tratar de resolver la ecuación matricial $AX = I$ donde X es una matriz $n \times n$ cuyos elementos son incógnitas. Esto conduce a n sistemas de ecuaciones, todos ellos con la misma matriz de coeficientes e igualados a cada una de las columnas de I. Con ello se deduce que el cálculo de la inversa equivale a aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan a $(A|I)$. Si existe la inversa (y sólo en ese caso) el final del algoritmo será $(I|A^{-1})$.

Por ejemplo, calculemos la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Los pasos del algoritmo de Gauss-Jordan son:

$$\underset{f_3\mapsto f_3-2f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3\mapsto f_3+5f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3\mapsto f_3/7}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array}\right) \underset{f_2\mapsto f_2-3f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_1\mapsto f_1-2f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/7 & 16/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 & 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/7 & 16/7 & 6/7 \\ 6/7 & -8/7 & -3/7 \\ -2/7 & 5/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden escribir como una simple ecuación matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Si A es una matriz invertible entonces el sistema tiene solución única dada por $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Las transformaciones elementales en los algoritmos de Gauss y Gauss-Jordan pueden escribirse en términos de multiplicaciones de matrices.