Resumen del capítulo 11

Aplicaciones ortogonales y autoadjuntas Consideremos un espacio vectorial euclídeo V. Se dice que una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ es una *aplicación ortogonal* si preserva el producto escalar, es decir, si

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \qquad \text{para todo } \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice que es una *matriz ortogonal* si verifica $A^tA = I$, donde I es la matriz identidad. De esta definición se sigue fácilmente $|A| = 1$, $A^{-1} = A^t$ y que las columnas de A son ortonormales.

La relación entre ambas definiciones es que si consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ entonces f es una aplicación ortogonal si y sólo si A es una matriz ortogonal.

Por ejemplo, la aplicación $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (3x-4y)/5 \\ (4x+3y)/5 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (con el producto escalar usual) es ortogonal porque

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{y se verifica} \qquad \left(\begin{smallmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ con V un espacio vectorial euclídeo, se dice que $f' : V \longrightarrow V$ es la *aplicación adjunta* de f si

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f'(\vec{y})\rangle \qquad \text{para todo } \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

Consecuentemente se dice que f es una *aplicación autoadjunta* si $f = f'$.

De nuevo si consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ estos conceptos tienen una interpretación matricial sencilla: La aplicación adjunta de f es $f'(\vec{x}) = A^t\vec{x}$ y por tanto f es autoadjunta si A es una matriz simétrica ($A = A^t$).

Por ejemplo, la adjunta de la aplicación antes citada es $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (3x+4y)/5 \\ (-4x+3y)/5 \end{smallmatrix}\right)$.

Estos criterios para decidir si f es ortogonal o autoadjunta se extienden a cualquier espacio euclídeo siempre que se usen bases ortonormales. Es decir, dada una aplicación $f : V \longrightarrow V$ cuya matriz en una base ortonormal es A, entonces f es ortogonal si y sólo si $A^tA = I$ (la matriz es ortogonal) y es autoadjunta si y sólo si $A = A^t$ (la matriz es simétrica). En cualquier caso A^t será la matriz de la aplicación adjunta en dicha base.

Teorema espectral Sea V un espacio vectorial euclídeo sobre $\mathbb{R}$. El *teorema espectral* asegura que dada una aplicación autoadjunta $f : V \longrightarrow V$ existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f. Dicho de otra forma, cualquier aplicación autoadjunta diagonaliza en una base ortonormal.

En particular, toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable.

El teorema espectral un resultado teórico, para llevar a efecto la diagonalización hay que emplear los métodos de los temas anteriores.

Por ejemplo, diagonalicemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

en una base ortonormal (con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$).

Unos cálculos (que es mejor abreviar usando las propiedades de los determinantes) prueban que la ecuación característica $|A-\lambda I| = 0$ es $(\lambda-1)^2(6-\lambda) = 0$, entonces los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$.

Al resolver $(A - I)\vec{x} = \vec{0}$ y $(A - 6I)\vec{x} = \vec{0}$ por Gauss se obtiene que los autovectores correspondientes a $\lambda_1 = 1$ y a $\lambda_2 = 6$ son los vectores (salvo $\vec{0}$) respectivamente de los subespacios

$$E_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad E_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

El teorema espectral asegura que los vectores de E_1 y los de E_2 son ortogonales pero no que los generadores que nosotros elijamos formen una base ortonormal. Si ortogonalizamos los generadores de E_1 con el proceso de Gram-Schmidt, debemos sustituir el segundo por

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}/2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Con estos tres vectores tenemos una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A, que ortonormalizada (dividiendo cada vector por su norma) es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2\sqrt{5} \\ -\sqrt{2}/2\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\} .$$

La matriz C de cambio de base de B a la canónica es la que tiene como columnas estos vectores y se cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C^{-1}AC.$$

Nótese que C es una matriz ortogonal (porque sus columnas son vectores ortonormales) y por tanto $C^{-1} = C^t$.