Resumen del capítulo 10

Ortogonalización Dada una base ortogonal de un espacio vectorial euclídeo es fácil ortonormalizarla sin más que normalizar cada uno de sus vectores (es decir, dividiéndolos por su norma).

Si $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ es una base de un espacio vectorial euclídeo V el *proceso de Gram-Schmidt* produce una base ortogonal $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ de V. Este proceso es un algoritmo definido por

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{b}_1 \\ \vec{x}_i = \vec{b}_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\vec{b}_i \cdot \vec{x}_j}{\|\vec{x}_j\|^2}\, \vec{x}_j, \qquad i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Se puede interpretar el algoritmo diciendo que a cada $\vec{b}_i$ se le resta su proyección ortogonal (véase el siguiente apartado) sobre $\langle \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}\} \rangle$.

Por ejemplo, la base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ no es ortonormal con el producto escalar $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ$. Con el proceso de Gram-Schmidt conseguimos una base ortogonal $\{P_1, P_2, P_3\}$ tomando $P_1 = 1$ y

$$P_2 = x - \frac{\int_{-1}^{1} 1x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1^2\, dx} 1 = x, \quad P_3 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} 1x^2\, dx}{\int_{-1}^{1} 1^2\, dx} 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\, dx}{\int_{-1}^{1} x^2\, dx} x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Para ortonormalizarla se divide por la norma obteniéndose

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \sqrt{\frac{45}{8}} \big(x^2 - \frac{1}{3}\big) \Big\}.$$

De esta forma se concluye que todo espacio vectorial euclídeo (de dimensión finita) tiene bases ortonormales.

Proyección ortogonal Dado un subespacio W de un espacio vectorial euclídeo V se define el *complemento ortogonal* de W (en V) como el subespacio

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in V \ : \ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \quad \forall \vec{w} \in W\}.$$

Se prueba que $V = W + W^{\perp}$ y es fácil ver que $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$ de modo que V es suma directa de W y $W^{\perp}$. En consecuencia cada vector $\vec{v} \in V$ se descompone de manera única como $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ con $\vec{w} \in W$ y $\vec{u} \in W^{\perp}$. Se dice que $\vec{w}$ es la *proyección ortogonal* de $\vec{v}$ en W y se escribe $\vec{w} = \mathrm{Pr}_W(\vec{v})$. De la propiedad $(W^{\perp})^{\perp} = W$ se sigue que, con la notación anterior, $\vec{u} = \mathrm{Pr}_{W^{\perp}}(\vec{v})$. En consecuencia

$$\vec{v} = \mathrm{Pr}_W(\vec{v}) + \mathrm{Pr}_{W^{\perp}}(\vec{v}).$$

Si $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ es una base ortogonal de W entonces la proyección ortogonal responde a la fórmula:

$$\mathrm{Pr}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|^2}\, \vec{x}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|^2}\, \vec{x}_2 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}_n}{\|\vec{x}_n\|^2}\, \vec{x}_n.$$

Cuando $W^\perp$ es un espacio particularmente sencillo puede ser más fácil hallar primero $\mathrm{Pr}_{W^\perp}(\vec{v})$ y de ahí despejar $\mathrm{Pr}_W(\vec{v})$.

Por ejemplo, para hallar la proyección ortogonal de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio de $\mathbb{R}^4$ (con el producto escalar usual) $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, podemos proceder rápidamente notando que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \vec{n} \cdot \vec{x} = 0\}$ con $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y por ello $\vec{n}$ genera $W^\perp$. Entonces

$$\mathrm{Pr}_W(\vec{v}) = \vec{v} - \mathrm{Pr}_{W^\perp}(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\, \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, la forma general de proceder sería extraer primero una base ortogonal de W. En este caso el algoritmo de Gauss aplicado de la forma habitual produce una base B que se ortogonaliza utilizando el proceso de Gram-Schmidt

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \overset{\text{Gram-Schmidt}}{\longrightarrow} \ B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Con esta nueva base ya se puede aplicar la fórmula de la proyección ortogonal

$$\mathrm{Pr}_W(\vec{v}) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

que coincide con el resultado obtenido antes.