Soluciones del examen de Álgebra II (23/06/09)

1) a) No es cierto en general. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Es cierto porque la relación $(AB)^t = B^t A^t$ aplicada sucesivas veces prueba $(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$ y tomando $A_i = A$ y $n = 2009$ implica, si A es simétrica, $(A^{2009})^t = (A^t)^{2009} = A^{2009}$.

c) Según la fórmula del cambio de base $B = C^{-1}AC$ donde C es la matriz que cambia de la base en la que está B a la base en la que está A. Tomando determinantes $|B| = |C^{-1}||A||C| = |A|$, donde se ha usado $|C^{-1}| = |C|^{-1}$ que es una sencilla consecuencia de tomar determinantes en $C^{-1}C = I$.

d) No es cierto en general. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{implica} \qquad A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso $\mathrm{rg}(A) = 2$ y $\mathrm{rg}(A^2 + A) = 1$. También se puede tomar $A = -I$.

2) a) Calculamos la imagen de los elementos de la base

$$\begin{array}{lclcl} f(1) & = & 0 + 0 - 1 + (2x + x^2) \cdot 1 & = & -1 + 2x + x^2 \\ f(x) & = & 0 + x - x + (2x + x^2) \cdot 1 & = & 0 + 2x + x^2 \\ f(x^2) & = & 2x + 2x^2 - x^2 + (2x + x^2) \cdot 1 & = & 0 + 4x + 2x^2 \end{array}$$

Las coordenadas de estos vectores (polinomios) en la base B son evidentemente los coeficientes de 1, x y x^2, Colocándolos ordenadamente en columnas dan lugar a la matriz buscada

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Una posible método para hallar la matriz M' que resuelve este apartado es aplicar la fórmula de cambio de base a M. En lugar de ello seguiremos el mismo esquema que en el apartado anterior, que es el procedimiento utilizado por la mayoría de los estudiantes. Al calcular la imagen de los elementos de la base la única novedad es que $f(x^2)$ se ve reemplazado por

$$f(x + x^2) \quad = \quad 2x + x(1 + 2x) - (x + x^2) + (2x + x^2) \cdot 1 \quad = \quad 6x + 3x^2.$$

Las coordenadas de un polinomio P en la base B' <u>no</u> son los coeficientes de 1, x y x^2 sino los números a, b y c tales que $P = a + bx + c(x + x^2)$. En nuestro caso es muy fácil hallar estas coordenadas a simple vista, sin hacer ninguna operación, para las imágenes de los elementos de la base:

$$\begin{array}{lcl} -1 + 2x + x^2 & = & -1 + x + (x + x^2) \\ 0 + 2x + x^2 & = & 0 + x + (x + x^2) \\ 0 + 6x + 3x^2 & = & 0 + 3x + 3(x + x^2) \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Trabajemos con la base usual B (cualquier base es admisible). Los vectores $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ formados por las coordenadas de los elementos de $\mathrm{Im}(f)$ son las combinaciones lineales de las columnas de M, es decir, conforman el espacio

$$\langle \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \} \rangle = \langle \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \} \rangle$$

(porque el tercer vector es un múltiplo del segundo). Estos dos últimos vectores son linealmente independientes, por tanto, pasando de las coordenadas a los polinomios, a través de B, obtenemos como base de $\mathrm{Im}(f)$ a

$$B_{\mathrm{Im}} = \{-1 + 2x + x^2, 2x + x^2\}.$$

Análogamente, los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ formados por las coordenadas de los elementos de $\text{Nuc}(f)$ son las soluciones de $M\vec{x} = \vec{0}$. Resolviendo el sistema homogéneo mediante el algoritmo de Gauss

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto una base del núcleo es $B_{\text{Nuc}} = \{-2x + x^2\}$.

3) a) Resolvemos primero la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Por tanto los autovalores son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$. Resolviendo los sistemas $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ obtenemos los vectores propios correspondientes a cada uno de estos valores propios.

Para $\lambda_1 = 3$, aplicando el algoritmo de Gauss

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}$$

De la misma forma, para $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x = -2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}$$

Entonces los autovectores correspondientes a λ_i son los vectores (no nulos) de los subespacios V_i dados por

$$V_1 = \left\langle \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad V_2 = \left\langle \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \right\rangle.$$

Los dos generadores indicados de V_2 son linealmente independientes y por la teoría, el generador indicado de V_1 es linealmente independiente con cualquier elemento (no nulo) de V_2 (porque corresponden a autovalores distintos). Por consiguiente los tres autovectores dados por los generadores son linealmente independientes y consecuentemente forman una base de $\mathbb{R}^3$. Con ello se tiene que f es diagonalizable.

b) La forma es bilineal porque lo dice el enunciado y basta comprobar que es simétrica y definida positiva.

Es simétrica porque $B = B^t$, ya que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^{\,t} B \vec{y} = (\vec{x}^{\,t} B \vec{y})^t = \vec{y}^{\,t} B^t \vec{x} = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

Para ver que es definida positiva se puede aplicar el criterio de Sylvester. Los determinantes angulares de B son:

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad |B| = 1$$

y como todos son positivos la forma bilineal es definida positiva y define un producto escalar.

c) Lo más rápido es comprobar que f es autoadjunta cuando se usa el producto escalar $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ empleando la definición, es decir, verificando $\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$, lo cual con la notación del enunciado se reduce a comprobar $A^t B = BA$ (para que $(A\vec{x})^t B \vec{y} = \vec{x}^{\,t} B (A\vec{y})$ se verifique) y esto es un cálculo elemental. El teorema espectral asegura que en estas condiciones existe la base buscada.

Una solución más constructiva (y menos breve) sin utilizar el teorema espectral es ortonormalizar la base de autovectores obtenida en el primer apartado, justificando por qué después del proceso de ortonormalización siguen siendo autovectores.