Solución del examen de Álgebra II del 1 de Abril de 2009

---

1) a) Para hallar la matriz aplicamos f a cada uno de los elementos de la base. Las componentes de los resultados se ven a simple vista y forman las columnas de la matriz M:

$$\begin{array}{ll} f(1) = 1 & = \mathbf{1}\cdot 1 + \mathbf{0}\cdot x + \mathbf{0}\cdot x^2 \\ f(x) = 1 - x & = \mathbf{1}\cdot 1 + \mathbf{(\text{-}1)}\cdot x + \mathbf{0}\cdot x^2 \\ f(x^2) = 2x + x^2 & = \mathbf{0}\cdot 1 + \mathbf{2}\cdot x + \mathbf{1}\cdot x^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz M ya está en forma escalonada y como sus tres columnas son columnas pivote, su rango es 3 o equivalentemente $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$. También $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ y por la inclusión $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$, se debe cumplir $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$, es decir, f es sobreyectiva. Por otra parte la relación $3 = \dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \mathrm{Nuc}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ implica $\mathrm{Nuc}(f) = \{0\}$ y se deduce que f es inyectiva.

c) Si $f^{-1}(x^2) = a + bx + cx^2$ entonces $f(a + bx + cx^2) = x^2$. Operando e igualando los coeficientes de 1, x y x^2, es decir, igualando componentes, se obtiene

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b - 2b + 2c = 0 \\ c - 4c + 4c = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a = -2,\ b = 2,\ c = 1.$$

Por tanto $f^{-1}(x^2) = -2 + 2x + x^2$.

2) Calculamos primero las ecuaciones que determinan a V y a W utilizando eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & -2x+y \\ 0 & -2 & -x+z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & -2x+y \\ 0 & 0 & -x+2y-3z \end{array}\right).$$

Por tanto la ecuación buscada para V es $-x + 2y - 3z = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -3x+y \\ 0 & -1 & -x+z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -3x+y \\ 0 & 0 & -x+y-2z \end{array}\right).$$

Entonces la ecuación para W es $-x + y - 2z = 0$.

Resolvemos ahora el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\vec{v} \text{ con } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y se concluye que $\{\vec{v}\}$ es una base de $V \cap W$.

b) Recordando que $\dim V + \dim W = \dim(V \cap W) + \dim(V + W)$, de $\dim V = 1$, $\dim W = 2$, $\dim(V \cap W) = 1$ se deduce $\dim(V + W) = 3$. Como $V + W \subset \mathbb{R}^3$, se tiene $V + W = \mathbb{R}^3$.

3) Efectuamos reducción de Gauss hasta llegar a la forma escalonada. Comenzamos intercambiando la primera y la tercer fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -13 & 11 \\ 0 & 2 & -28 & 26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema homogéneo asociado a esta matriz se llega a que sus soluciones son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \vec{v} \quad \text{con } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí, $\{\vec{v}\}$ es una base de $\mathrm{Nuc}(T)$.

Por otro lado, de la aplicación de la reducción de Gauss se deduce que las tres primeras columnas son columnas pivote, así pues, una base de $\mathrm{Im}(T)$ es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$