Álgebra II 23-VI-09

$\square + \square + \square = \square$

Apellidos y nombre:

DNI:

1) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones tienen validez general para $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dando una explicación cuando sean ciertas y un contraejemplo cuando no lo sean.

a) Si A y B son simétricas, entonces AB también lo es.

b) Si A es simétrica, entonces A^{2009} también lo es.

c) Si A y B son matrices de una misma aplicación lineal en diferentes bases, entonces sus determinantes coinciden.

d) $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(A^2 + A)$.

2) Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial formado por los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida mediante

$$f(P) = xP'' + xP' - P + (2x + x^2)P(1)$$

donde P' y P'' indican las derivadas primera y segunda.

a) Hallar la matriz de f en la base $B = \{1, x, x^2\}$.

b) Hallar la matriz de f en la base $B' = \{1, x, x + x^2\}$.

c) Hallar bases de $\operatorname{Nuc}(f)$ y de $\operatorname{Im}(f)$.

3) Considérense en $\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal y la forma bilineal dadas por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ y $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^{\,t} B \vec{y}$ respectivamente, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que f es diagonalizable.

b) Comprobar que la forma bilineal $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ define un producto escalar.

c) Estudiar si existe una base ortonormal (con respecto al producto escalar $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$) de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores.