Álgebra II 04-IX-08

$\square + \square + \square + \square = \square$

Nombre y apellidos:

DNI:

---

1. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando una pequeña demostración o un contraejemplo en cada caso:

a) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal inyectiva entonces también es biyectiva.

b) Un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido mediante dos ecuaciones lineales tiene dimensión dos.

c) Si $V,\ W \subset \mathbb{R}^2$ son dos subespacios vectoriales distintos de dimensión 1 entonces $V + W = \mathbb{R}^2$.

d) El espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ formado por las matrices simétricas de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 6.

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obtener bases y dimensiones del subespacio vectorial generado por las filas de A, $Fil(A)$, del subespacio vectorial generado por las columnas de A, $Col(A)$, y de los subespacios vectoriales $Nul(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 :\ A\vec{x} = \vec{0}\}$ y $Nul(A^t) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 :\ A^t(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

b) Obtener el rango de A.

c) Hallar dimensiones de los subespacios intersección y suma de los subespacios $Col(A)$ y $Nul(A)$.

3. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial formado por las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales. Considerar la transformación lineal $T : V \to V$ dada por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ -c & b \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que T es una aplicación lineal.

b) Obtener la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Demostrar que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ son autovalores de T.

c) ¿Es T diagonalizable?

4. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial formado por los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales dotado con el producto escalar $\langle P, Q\rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

a) Probar que realmente $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ define un producto escalar en $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Hallar la proyección ortogonal del polinomio $P = x^2 + x + 1$ sobre el subespacio generado por $\{1, x\}$.

c) Estudiar si la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por $f(a + bx + cx^2) = 2c/3 - cx^2$ es autoadjunta. Indicación: emplear la definición.