Inicial Algebra II. Primer curso de Ingeniería Informática.

Primer Apellido

13 de Septiembre de 2007

Apellidos ____________ Nombre ____________ DNI ____________ Grupo ________

Debes justificar todas tus respuestas.

1. (Cuestiones, 0.5 puntos cada una)

a) Sea $\mathbf{A} := (a_{ij})$ una matriz cuadrada con entradas reales y todas números estrictamente positivos ($a_{ij} > 0$). ¿Serán, necesariamente, todos los autovalores reales de $\mathbf{A}$ estrictamente positivos?

Solución
Es falso y hay muchos ejemplos. Para encontrar uno empezamos con la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

e imponemos que -1 sea una raíz de su polinomio característico

$$p(\lambda) := det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-a).$$

Obtenemos así la ecuación $2(b+1) - a = 0$, que tiene las soluciones positivas $a = 4, b = 1$, y muchas otras.

b) ¿Es cierto que una matriz diagonalizable con todos sus autovalores positivos es el cuadrado de otra matriz?

Solución
Sí es cierto. Llamemos $\mathbf{A}$ a la matriz con autovalores positivos. Una matriz diagonal $\mathbf{D}$ con todos sus autovalores positivos es el cuadrado de la matriz diagonal con autovalores las raíces cuadradas positivas de los autovalores de $\mathbf{D}$. Esto no basta.
Supongamos que $\mathbf{P}$ es la matriz de cambio de base a la base de autovectores. Entonces

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} =: \mathbf{A},$$

con $\mathbf{D}$ una matriz diagonal que será el cuadrado de otra matriz $\mathbf{D_1}$. Entonces

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{D_1} \cdot \mathbf{P}^{-1} =: \mathbf{A_1},$$

es la matriz buscada porque

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{D_1} \cdot \mathbf{P}^{-1})^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D_1} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{D_1} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D_1}^2 \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}.$$

c) ¿Puede una matriz $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ser diagonalizable y nilpotente (i.e. $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ para algún k)?

Solución
Esto no es posible, ya que, para cualquier entero positivo k, si $\mathbf{A}$ es diagonalizable entonces $\mathbf{A}^k$ también lo es, con autovalores las potencias k-ésimas de los de $\mathbf{A}$. Esto haría que si la matriz $\mathbf{A}$ fuera fuera nilpotente necesariamente sería nula.

d) Supongamos un sistema lineal homogéneo con dos ecuaciones y dos incógnitas y coeficientes números enteros. ¿Es posible que el sistema tenga como única solución $(0, 0)$, pero que al reducir los coeficientes módulo 5 se obtenga un sistema con dos ecuaciones no nulas y con soluciones distintas de $(0, 0)$?

Solución
Esto es perfectamente posible, y basta que el determinante de la matriz 2×2 del sistema sea, por ejemplo, igual a 5. Esto asegura que sobre los números racionales la única solución del sistema es $(0, 0)$, pero al reducir módulo 5 el determinante se hace cero, de forma que las dos ecuaciones son esencialmente la misma y el sistema tiene soluciones diferentes de $(0, 0)$.

e) Demostrar que en un espacio vectorial de dimensión n no puede haber un subespacio de dimensión $m > n$.

Solución

1) Llamemos E al espacio vectorial, y sean $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{f_1, \ldots, f_m\}$ bases de E y del subespacio.
2) Como $m > n$ podemos construir una aplicación lineal $g : E \to E$ mediante la prescripción $f(e_i) := f_i,\ i = 1, \ldots, n$.
3) Como los vectores f_i son linealmente independientes f es inyectiva.
4) Como $f : E \to E$ es inyectiva, necesariamente es suprayectiva, y, por tanto, el subespacio debe coincidir con E y m debe ser igual a n.

Otro argumento, muy similar, consistiría en usar que la base de m vectores del subespacio se podría extender a una base de E que tendría más de n vectores, pero no puede haber dos bases del mismo espacio vectorial con distinto número de vectores.

f) ¿Es cierto que para todo producto escalar, en un espacio vectorial de dimensión finita, existe una base en la que su matriz es la matriz identidad?

Solución
Si es cierto, se trata simplemente de una base ortonormal, que siempre existe en estas condiciones.

2. (2 puntos) Consideramos los vectores de $E := \mathbb{Q}^4$

$$e_1 := (1,2,3,4),\ \ e_2 := (1,-1,2,-2),\ \text{ y }\ \ e_3 := (1,1,1,1).$$

Sea $E_1 :=< e_1, e_2 >\subset \mathbb{Q}^4$ el subespacio generado por los vectores e_1y e_2.

a) Encontrar un vector $e \in \mathbb{Q}^4$ tal que $E_2 :=< e_3, e >$ verifique

$$E_1 + E_2 = E.$$

¿Qué puedes decir acerca de $E_1 \bigcap E_2$?

b) Determinar las condiciones que deben verificar las coordenadas (x, y, z, t) de un vector e para que

$$E_1 + < e_3, e >= E.$$

Solución

a) Elegimos $e := (0,0,0,1)$ que parece un buen candidato. Para comprobar que $E_1 + E_2 = E$ basta asegurarse de que los cuatro vectores, e_1, e_2, e_3, e, son linealmente independientes. Los colocamos como columnas de una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene como reducida gaussiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, los cuatro vectores son linealmente independientes porque hay cuatro pivotes en la matriz reducida y se verifica $E_1 + E_2 = E$. Gracias a la fórmula de Grassmann podemos afirmar que si la suma de E_1 y E_2 es E, entonces su intersección se reduce al subespacio nulo.

b) Colocamos ahora, como última columna de la matriz, el vector (x, y, z, t) en lugar de $(0,0,0,1)$, y debemos encontrar condiciones para que el rango de la matriz sea 4. Para esto basta que el determinante sea no nulo, y la condición resulta ser

$$-3z - 9y + 7x + 5t \neq 0.$$

También puede hacerse reduciendo la matriz como en el apartado anterior, y se obtiene el determinante en el lugar 44 de la matriz reducida.

3. (2 puntos)

a) Reducir a suma de cuadrados la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) := x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 6yz.$$

b) Calcular una base del subespacio ortogonal al vector $(1,1,1)$ respecto a la forma bilineal simétrica asociada a $Q(x, y, z)$.

Solución

a) Completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &:= x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 6yz = x^2 + 2x(y+z) - y^2 + 3z^2 + 6yz = \\ &= (x+y+z)^2 - y^2 - z^2 - 2yz - y^2 + 3z^2 + 6yz = (x+y+z)^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4yz = \\ &= (x+y+z)^2 - 2(y^2 - z^2 - 2yz) = (x+y+z)^2 - 2((y-z)^2 - 2z^2) = \\ &= (x+y+z)^2 - 2(y-z)^2 + 4z^2 = x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2. \end{aligned}$$

b) La matriz de la forma bilineal asociada a Q es

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ya que se verifica

$$Q(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \mathbf{B} \cdot (x, y, z)^t.$$

La ecuación del ortogonal al vector $(1,1,1)$ será

$$(1,1,1) \cdot \mathbf{B} \cdot (x, y, z)^t = 3x + 3y + 7z = 0.$$

Una base de ese subespacio ortogonal se obtiene dando valores, 1 y 0, a las variables y y z:

$$\{(-1,1,0), (-7/3, 0, 1)\}.$$

4. (3 puntos) Sea $\mathbf{D}$ una matriz 2×2 fijada. Consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 2} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{D}}} & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ \mathbf{X} & \mapsto & [\mathbf{D}, \mathbf{X}] := \mathbf{D} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{D}. \end{array}$$

a) Calcular la matriz de $\Phi_{\mathbf{D}}$ en la base estandar de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

b) Determinar el rango de Φ_D en función de las entradas de la matriz $\mathbf{D}$.

c) Comprobar que la matriz de $\Phi_{\mathbf{D}}$, en la base estandar de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, es diagonal si y sólo si la matriz $\mathbf{D}$ es diagonal. Encontrar un ejemplo en que la matriz $\mathbf{D}$ NO sea diagonalizable y la matriz $\Phi_{\mathbf{D}}$ que le corresponde tampoco lo sea.

Solución

a) Supongamos que

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$[\mathbf{D}, \mathbf{X}] := \mathbf{D} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} bz - cy & (-d+a)\,y - bx + bt \\ (d-a)\,z + cx - ct & -bz + cy \end{pmatrix}$$

La matriz de $\Phi_{\mathbf{D}}$ que estamos buscando es 4×4 ya que $\mathcal{M}_{2\times 2}$ es de dimensión 4. Escribimos la matriz $\mathbf{X}$ como un vector en la forma (x, y, z, t), y tenemos que encontrar una matriz que multiplicada por este vector nos dé el vector

$$(bz - cy, (-d+a)y - bx + bt, (d-a)z + cx - ct, -bz + cy).$$

Debe ser claro que se trata de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Para empezar observamos que el rango no puede ser 4 porque la última columna es la opuesta de la primera. Calculamos la reducción gaussiana

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & 0 & d-a & -c \\ -b & a-d & 0 & b \\ 0 & -c & b & 0 \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix} \overset{c\neq 0}{\sim} \begin{pmatrix} c & 0 & d-a & -c \\ 0 & a-d & (d-a)\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & -c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & 0 & d-a & -c \\ 0 & a-d & (d-a)\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & -c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Si $c \neq 0$ sirve la reducción anterior, pero además las fila segunda y tercera de la última matriz son dependientes. Entonces el rango es 2.
2) Si $c = 0$ la matriz de $\Phi_{\mathbf{D}}$ queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ 0 & 0 & d-a & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

   i) Si $b \neq 0$ es claro que el rango es 2 porque, por ejemplo, la primera y la segunda fila son independientes, pero las otras dependen de ellas.
   ii) Si $c = b = 0$ puede ser que $a - d \neq 0$ y el rango es otra vez 2, o puede ser que $a = d$ y el rango es cero.

En resumen, el rango es dos salvo para las matrices de homotecias

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

para las que vale cero.

c) Es claro, mirando la matriz hallada en el primer apartado, que es diagonal si y sólo si $b = c = 0$, es decir, si y sólo si la matriz $\mathbf{D}$ es diagonal.
Supongamos ahora que $\mathbf{D}$ no es diagonalizable, por ejemplo, que se trata de la matriz

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $\Phi_{\mathbf{D}}$ será

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

que no es diagonalizable ya que su único autovalor es el 0, pero no es la matriz nula.