Inicial   Algebra II. Primer curso de Ingeniería Informática.   Grupo

14 de Septiembre de 2006

Primer Apellido

Apellidos ______________________ Nombre ______________ DNI ______________

Debes justificar todas tus respuestas.

1a. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real cuadrada $n \times n$ con todas sus entradas iguales, es decir, verificando $a_{ij} = a, \ \forall i, j$ para alguna constante real $a \neq 0$.

1. ¿Qué rango tiene A?

   El subespacio imagen está generado por el vector $(1, 1, 1, \ldots, 1)$*, y el rango es, por tanto, igual a* 1.

2. Demuestra que todo vector del núcleo de A, distinto de $(0, 0, \ldots, 0)$, tiene al menos una coordenada positiva y una negativa.

   La ecuación que determina el núcleo es

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

   de forma que, para todo vector del núcleo, la suma de las coordenadas es nula. Un vector no nulo del núcleo tiene que tener, al menos, una coordenada positiva y otra negativa, porque en caso contrario, todas positivas o todas negativas, es imposible que la suma sea cero.

3. ¿Cuánto valen los autovalores de A?

   Hemos visto que cero es un autovalor. ¿Hay más? Supongamos que $\lambda \neq 0$ *es un autovalor de autovector* e*:*

$$A(e) = \lambda \cdot e \neq \mathbf{0},$$

   pero entonces

$$\lambda \cdot e \in Im(A) =< (1, 1, \ldots, 1) >$$

   de forma que $(1, 1, \ldots, 1)$ *es un autovector de autovalor* na*. Los autovalores de* A *son* 0 *y* na*.*

4. ¿Es diagonalizable la matriz A?

   Podemos descomponer el espacio total $\mathbb{R}^n$ *como suma directa del núcleo de* A *más la imagen de* A*. Como el núcleo es el espacio propio de autovalor* 0 *y la imagen es el espacio propio de autovalor* na*, la matriz* A *es diagonalizable.*
   De manera indirecta hemos calculado el polinomio cárácterístico de A *queresulta ser, salvo quizá el signo,*

$$p_A(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - na).$$

1b. Sean U_1, U_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita. Decimos que U_1 y U_2 son **transversales** si $U_1 + U_2 = V$. Llamamos **codimensión** de un subespacio $U \subset V$ al entero $cod(U) = dim(V) - dim(U)$.

1. Demostrar que

$$cod(U_1 \cap U_2) \leq cod(U_1) + cod(U_2).$$

   Llamemos n *a la dimensión de* V*.*
   Partimos de la fórmula de Grassmann cambiada de signo

$$-dim(U_1) - dim(U_2) = -dim(U_1 \cap U_2) - dim(U_1 + U_2).$$

   Sumando $2n$ *a cada miembro de la igualdad obtenemos*

$$cod(U_1) + cod(U_2) = cod(U_1 \cap U_2) + n - dim(U_1 + U_2). \qquad (1)$$

   Como siempre se verifica $n - dim(U_1 + U_2) \geq 0$*, resulta la desigualdad que queremos.*

2. Demostrar que si U_1 y U_2 son transversales la desigualdad del apartado anterior es una igualdad.

   Los subespacios son transversales si $n - dim(U_1 + U_2) = 0$, en cuyo caso la fórmula (1) se reduce a la que queremos.

3. ¿Es cierto que, para U_1 y U_2 transversales, se verifica

$$dim(U_1) + dim(U_2) = cod(U_1 \cap U_2)?$$

   Esta fórmula será válida si

$$dim(U_1) + dim(U_2) = cod(U_1) + cod(U_2),$$

   y esta última puede verificarse o no. Por ejemplo, si $dim(U_1) = 2$, $dim(U_2) = 2$ y $dim(V) = 4$, con U_1 y U_1 transversales, se verifica la fórmula ya que $2 + 2 = 2 + 2$. Sin embargo, si $dim(U_1) = 2$, $dim(U_2) = 3$ y $dim(V) = 4$, no se verifica la fórmula porque $2 + 3 \neq 2 + 1$.

4. ¿Es cierto que dos subespacios con intersección nula son transversales?

   No necesriamente ya que pueden tener intersección nula pero que su suma no sea el espacio total. Por ejemplo, dos rectas distintas en $\mathbb{R}^3$ no son transversales pero su intersección es nula.

2. Consideramos la matriz

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular el determinante de M_α.

   Podemos calcular el determinante desarrollando por la cuarta columna, y resulta $1 - \alpha^2$. Entonces la matriz es invertible salvo para $\alpha = \pm 1$.

2. Calcular, para los valores de α para los que M_α sea invertible, la matriz inversa de M_α.

Calculamos la inversa efectuando reducción de Gauss-Jordan en la matriz $[M_\alpha \mid \mathbf{I}_4]$.

$$[M_\alpha \mid \mathbf{I}_4] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\alpha^2+1} & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\alpha^2+1} & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^2+1 & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\alpha^2+1} & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{\alpha^3}{\alpha^2-1} & -\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & -\dfrac{1}{\alpha^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{\alpha^3}{\alpha^2-1} & -\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Las entradas recuadradas son las que usamos como pivotes para efectuar la reducción de Gauss-Jordan. La inversa es la matriz formada por las cuatro últimas columnas de la última matriz:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & -\dfrac{1}{\alpha^2-1} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2-1} & 1 & 0 \\ \dfrac{\alpha^3}{\alpha^2-1} & -\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matriz M_α es la misma que la del ejercicio **2,** aunque los ejercicios son independientes.

1. Calcular, en función del parámetro α, los valores propios de M_α.

   El polinomio característico resulta ser

   $$x^4 - 4x^3 + (-\alpha^2+6)\,x^2 + (2\,\alpha^2-4)\,x - \alpha^2 + 1.$$

   Tratamos de buscar sus raíces como sobre los números racionales. Los divisores del término independiente son ± 1 y, como $1-\alpha^2 = (1-\alpha)(1+\alpha)$, $\pm(1-\alpha)$ y $\pm(1+\alpha)$. Dividiendo vemos que hay cuatro raíces $+1$ (doble), $1-\alpha$ y $1+\alpha$, que son los cuatro valores propios.

2. Determinar los valores de α para los que M_α es diagonalizable.

   Es claro que hay al menos un valor de α tal que M_α es diagonalizable: es $\alpha = 0$ para el que $M_\alpha = \mathbf{I}_4$ que es diagonal.
   Si $\alpha \neq 0$, calculamos el subespacio propio de autovalor 1:

   $$M_\alpha - \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   con núcleo, si $\alpha \neq 0$, igual a $<(0,0,0,1)>$. Esto quiere decir que para $\alpha \neq 0$ M_α no es diagonalizable, porque el autovalor 1 es doble pero el subespacio propio tiene dimensión 1.

4. Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Hallar bases de los subespacios $\mathrm{Col}(B)$ y $\mathrm{Nul}(B)$.

   La reducción gaussiana de la matriz B es

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   de forma que las dos primeras columnas de B son una base de $Col(B)$.
   Por otra parte, la reducción nos permite calcular una parametrización de la solución:

   $$\begin{array}{rcrcr} t_1 & = & -t_3 & + & t_4 \\ t_2 & = & t_3 & - & t_4 \end{array}$$

   de forma que una base del núcleo se obtiene dando valores adecuados a las variables libres, y resulta

   $$Nul(B) = < e_1 := (-1,1,1,0), e_2 := (1,-1,0,1) >$$

2. Calcular la proyección ortogonal de $(2,0,1,2)$ sobre $\mathrm{Nul}(B)$.

   Llamemos e al vector $(2,0,1,2)$. Calculamos primero los productos escalares:

   $$< e_1, e_1 >= 3, \; < e_2, e_2 >= 3, \; < e_1, e_2 >= -2$$

   y, en consecuencia, la matriz de Gram es

   $$G := (< e_i, e_j >) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Debemos resolver el sistema

$$G \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < e, e_1 > \\ < e, e_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

que tiene como solución el vector $(1,2)$. *Esto quiere decir que la proyección ortogonal de* e *sobre* $Nul(B)$ *es* $e_1 + 2e_2 = (1,-1,1,2)$.
Podemos comprobar que, como debe ser, $e - (1,-1,1,2) = (1,1,0,0)$ *es ortogonal a* e_1 *y* e_2.