Examen Algebra II. Primer curso Ing. Informática. Septiembre

Ejercicio 1.

(– pts.) Considérense los sistemas $Ax = b_j$*, con* A *una matriz* $m \times n$ *con* $m \geq n$ *y siendo* $b_j = e_1 + \ldots + e_j$*, para todo* $j = 1, \ldots, m$*, con* $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^m$*. Denotamos por* x_j *una solucón de* $Ax = b_j$*. Decidir justificadamente si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes cuando proceda:*

a) La colección de vectores $\{b_1, \ldots, b_m\}$ *forman una base de* $\mathbb{R}^m$*.*

Cierto / Falso

Justificación:

b) Si existen soluciones x_j*, para todo* $j = 1, \ldots, m$*, entonces la matriz* A *es cuadrada; es decir,* $m = n$*.*

Cierto / Falso

Justificación:

c) Si existen soluciones x_j*, para todo* $j = 1, \ldots, m$*, entonces la matriz* A *es invertible.*

Cierto / Falso

Justificación:

c) Si $m = n = 3$ y existen soluciones

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces A está determinada de manera única

Cierto / Falso

En cualquier caso describir una posible A,

$$A =$$

Justificación:

d) Si $m = n = 3$ y consideramos

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Decidir justificadamente si pueden ser solución de los sistemas considerados anteriormente.

Cierto / Falso

Justificación:

Ejercicio 2.

(– pts.) Sean A y B matrices $n \times n$ con A inversible. Sea λ un autovalor de A y μ un autovalor de B.

a) λ es necesariamente distinto de 0. Cierto / Falso

Justificación:

b) 2λ es autovalor de $2A$. Cierto / Falso

Justificación:

c) λ^2 es un autovalor de A^2. Cierto / Falso

Justificación:

d) $\lambda + \mu$ es autovalor de $A + B$. Cierto / Falso

Justificación:

e) $\lambda\mu$ es autovalor de AB. Cierto / Falso

Justificación:

f) μ es autovalor de $A^{-1}BA$. Cierto / Falso

Justificación:

g) μ es autovalor de B^t. Cierto / Falso

Justificación:

Ejercicio 3.

(– pts.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar una base B de $\mathrm{Nuc}(A)$.

b) Obtener una base ortonormal B' de $\mathrm{Im}(A)$.

c) Encontrar base del complemento ortogonal de $\mathrm{Im}(A)$.

d) Dar la matriz con respecto a las bases B y B' de la transformación lineal $T : \mathrm{Nuc}(A) \to \mathrm{Im}(A)$ que consiste en proyectar ortogonalmente.

Ejercicio 4.

(– pts.)

a) Para toda forma cuadrática $Q(x)$ en $\mathbb{R}^2$ existe un cambio de variable $x = Py$, con P una matriz ortogonal, tal que $Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ para $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$.

Cierto / Falso

Justificación:

b) Dada la forma cuadrática del apartado anterior, encontrar matriz ortogonal P y escalares λ_1 y λ_2 tales que si consideramos el cambio de variable $x = Py$, entonces $Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$.

$$P = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}; \qquad \lambda_1 = \qquad \text{y}\lambda_2 =$$

c) La forma cuadrática del apartado anterior es definida positiva.

Cierto / Falso

Justificación:

d) Una solución aproximada de $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es una solución al sistema $Ax = \hat{b}$. Si denotamos por C al conjunto de soluciones del último sistema, describir

$$\hat{b} = () \,; \qquad C =$$

Justificación: